Lezione nro 31 del 6/12/2011

Titolo nota 03/12/2011

$\mathcal{A} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ suddivisione di $[a,b]$

(in generale non sono equispaziati)

Somme di Darboux per difetto

$$S'(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \left[\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right]$$

Somme di Darboux per eccesso

$$S''(f, A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right]$$

Esempio $f = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

è limitata, definita su $[0,1]$ che è limitato

Ma NON È R-INTEGRABILE su $[0,1]$

si basa sul fatto che

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \exists q \in \mathbb{Q} \ x < q < y$

(*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ x < i < y$

vedi al termine della lezione

Prendo $\mathcal{A} = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$

Calcolo: $S'(f, A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = 0$

Infatti, $\forall k = 0, \dots, n-1 \quad x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists i_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ x_k < i_k < x_{k+1}$

irrazionali densi

ma $f(i_q) = 0 \Rightarrow \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f \leq f(i_k) = 0 \Rightarrow S' = 0$

Viceversa

Proviamo: $S''(f,A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f = 1$

Si sfrutta il fatto che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, e perciò

$$\forall k=0,\dots,k-1 \quad x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R} \xRightarrow{\mathbb{Q} \text{ è denso in } \mathbb{R}} \exists\, q_k \in \mathbb{Q} \; : \; x_k < q_k < x_{k+1}$$

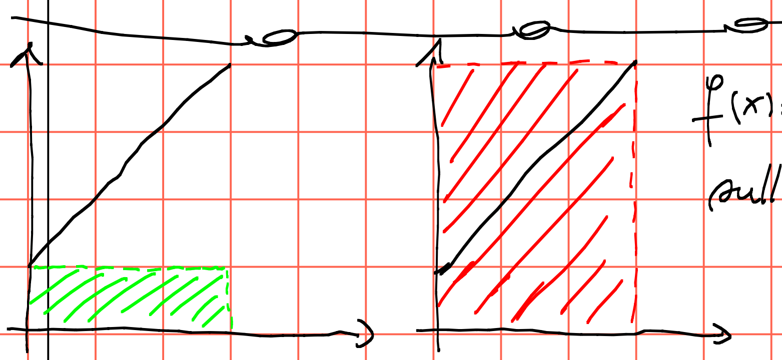
ma $f(q_k) = 1 \Rightarrow \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f \geq f(q_k) = 1$

allora $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \cdot 1 = 1-0 = 1 = S''(f,A)$

Dunque si è provato che

$\forall A \qquad S''(f,A) - S'(f,A) = 1-0 > 0$

$\Rightarrow S''(f) \neq S'(f) \Rightarrow f$ non è R-int.



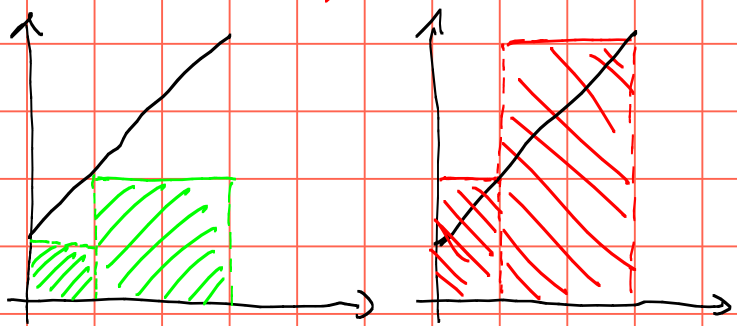
$f(x) = x+1$

sull'intervallo $[0,3]$

$A_1 = \{0,3\}$ → $S'(f,A_1) = 3$

→ $S''(f,A_1) = 12$

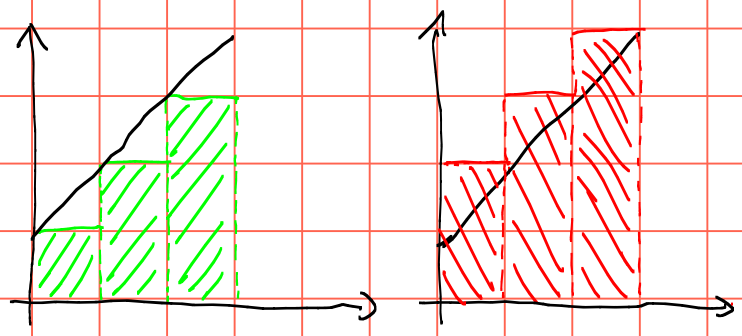
$\Delta S(f,A_1) = S''(f,A_1) - S'(f,A_1) = 9$



$A_2 = \{0,1,3\}$ → $S'(f,A_1) = 5$

→ $S''(f,A_1) = 10$

$\Delta S(f,A_2) = S''(f,A_2) - S'(f,A_2) = 5$



$$\mathcal{A}_3 = \{0,1,2,3\} \nearrow S'(f,\mathcal{A}_3) = 6 \quad \searrow S''(f,\mathcal{A}_3) = 9$$

$$\Delta S(f,\mathcal{A}_3) = S''(f,\mathcal{A}_3) - S'(f,\mathcal{A}_3) = 3$$

$$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\Delta S(f,\mathcal{A}_3)}} < \underset{5}{\underset{\shortparallel}{\Delta S(f,\mathcal{A}_2)}} < \underset{9}{\underset{\shortparallel}{\Delta S(f,\mathcal{A}_1)}}$$

Oss : Comunque si prende la suddivisione $\mathcal{A}$.

$S'(f,\mathcal{A}) \leq S''(f,\mathcal{A})$ (immediato)

Teorema (monotonia somme eccesso e difetto)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata; $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due suddivisioni di $[a,b]$

① $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies S'(f,\mathcal{A}) \leq S'(f,\mathcal{B})$

$S''(f,\mathcal{B}) \leq S''(f,\mathcal{A})$

② $S'(f,\mathcal{A}) \leq S''(f,\mathcal{B})$

e

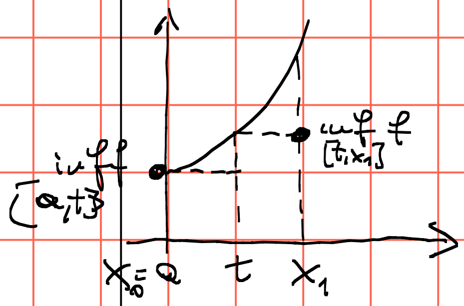
$S'(f,\mathcal{B}) \leq S''(f,\mathcal{A})$

Dim

① Supponiamo $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{t\}$ (nel caso che

B: $A=\{t_1 \dots t_m\}$, la tesi varrà a maggior ragione) Inoltre, per semplicità supponiamo

$a = x_0 < t < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ (non è restrittivo)



$$S'(f,A) = (x_1-x_0)\inf_{[x_0,x_1]} f + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf_{[x_k,x_{k+1}]} f$$

$$= (t-x_0)\inf_{[x_0,x_1]} f + (x_1-t)\inf_{[x_0,x_1]} f + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf_{[x_k,x_{k+1}]} f$$

$$\leq (t-x_0)\inf_{[x_0,t]} f + (x_1-t)\inf_{[t,x_1]} f + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf_{[x_k,x_{k+1}]} f$$

$$= S'(f,B)$$

In modo perfettamente analogo, osservando che

$$(t-x_0)\sup_{[x_0,t]} f + (x_1-t)\sup_{[t,x_1]} f \leq (t-x_0)\sup_{[x_0,x_1]} f + (x_1-t)\sup_{[x_1,x_0]} f$$

$$= (x_1-x_0)\sup_{[x_0,x_1]} f$$

si ha che

$S''(f,B) \leq S''(f,A)$ e quindi si ha la ①

② dobbiamo confrontare $S'(f,A)$ con $S''(f,B)$ senza sapere in che relazione stanno A e B.

Ma allora, preso $C = A \cup B$ si ha che

$A \subseteq C$ e $B \subseteq C$

e dunque

$$S'(f,A) \leq S'(f,C) \overset{\text{ovvio}}{\leq} S''(f,C) \leq S''(f,B)$$

ovvero $\quad s'(f,\mathcal{A}) \leq S''(f,\mathcal{B})$

In maniera analoga si ottiene

$$s'(f,\mathcal{B}) \leq s'(f,\mathcal{C}) \leq S''(f,\mathcal{C}) \leq S''(f,\mathcal{A})$$

da cui si ottiene

$$s'(f,\mathcal{B}) \leq S''(f,\mathcal{A}) \qquad \lightning$$

Ricordiamo ora che f è R-Integrabile

se $\quad s'(f) = S''(f) \quad$ ove

$$s'(f) = \sup_{\mathcal{A}} s'(f,\mathcal{A}) \quad e \quad S''(f) = \inf_{\mathcal{B}} S''(f,\mathcal{B})$$

da cui si ottiene

<u>Corollario</u> Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

allora $\quad s'(f) \leq S''(f)$

(sarà uno $=$ quando f integrabile)

<u>dim</u>

Dalla (2) del Teorema precedente

$$s'(f,\mathcal{A}) \leq S''(f,\mathcal{B}) \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ suddivisioni}$$

e dunque

$$\sup_{\mathcal{A}} s'(f,\mathcal{A}) = s'(f) \leq S''(f,\mathcal{B})$$

Da qui si ha pure che

$$s'(f) \leq \inf_{\mathcal{B}} S''(f,\mathcal{B}) = S''(f) \qquad \lightning$$

Teorema (Criterio di Integrabilità)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

Sono tra loro equivalenti

① f è R-Integrabile su $[a,b]$

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon \quad S''(f, \mathcal{B}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$

③ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{C}_\varepsilon \quad S''(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

dim

f R-Integrabile se $S'(f) = S''(f) = \int_a^b f dx$

con $S'(f) = \sup_{\mathcal{A}} S'(f, \mathcal{A}) \quad S''(f) = \inf_{\mathcal{B}} S''(f, \mathcal{B})$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon : \int_a^b f dx - \varepsilon < S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{B}_\varepsilon \quad \int_a^b f dx + \varepsilon > S''(f, \mathcal{B}_\varepsilon)$

da cui si ottiene

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon : S''(f, \mathcal{B}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < 2\varepsilon$

Ne segue che ① $\Leftrightarrow$ ②

② $\Rightarrow$ ③ per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon : S''(f, \mathcal{B}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$

Si prende $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon \quad \mathcal{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon$ e $\mathcal{B}_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon$

e dunque $\quad S'(f,\mathcal{A}_\varepsilon) \le S'(f,\mathcal{C}_\varepsilon) \le S''(f,\mathcal{C}_\varepsilon) \le S''(f,\mathcal{B}_\varepsilon)$

da cui segue $\quad S''(f,\mathcal{C}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{C}_\varepsilon) \le S''(f,\mathcal{B}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{A}_\varepsilon)$

e perciò $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon : S''(f,\mathcal{C}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

(3) ⇒ (2) Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{C}_\varepsilon \quad S''(f,\mathcal{C}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

da cui segue (2) prendendo $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon$

Si vogliono individuare classi di funzioni integrabili

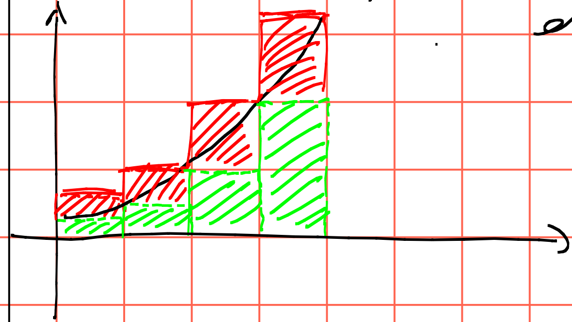
<u>Teorema</u> (funzioni monotone sono integrabili

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona (crescente o decrescente)

e limitata. Allora f è R-integrabile.

<u>dim</u>

Supponiamo $f \nearrow_=$



fondamentale

essendo $f \nearrow_=$

$$\inf_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x_k)$$

$k = 0 \dots n-1$

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x_{k+1})$$

Ne segue che, presa la suddivisione

$$\mathcal{A}_n = \left\{ a + \frac{b-a}{n} \cdot k \ : \ k=0,\dots,n \right\}$$

$$S'(f,\mathcal{A}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) f(x_k)$$

$$S''(f,\mathcal{A}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) f(x_{k+1})$$

da cui segue

$$\Delta S(f,\mathcal{A}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \left\{ \left[\cancel{f(x_1)} - f(x_0) \right] + \left[\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} \right] + \left[f(x_3) - \cancel{f(x_2)} \right] + \dots \right\}$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(x_n) - f(x_0) \right] = \frac{b-a}{n} \left[f(b) - f(a) \right]$$

e dunque $\Delta S(f,\mathcal{A}_n) \longrightarrow 0$

Ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon) \ \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \exists \mathcal{A}_n : \Delta S(f,\mathcal{A}_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon$ suddivisione t.c. $S''(f,\mathcal{A}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$

<u>Teorema</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

allora f - R - integrabile su $[a,b]$

<u>dim</u>

f continua in $[a,b] \overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow} f$ è limitata

Inoltre vale Teorema Heine Cantor sull'uniforme

continuità e si ha

$$\forall \varepsilon>0 \ \boxed{\exists \delta>0 \atop \delta=\delta(\varepsilon)} : |x-y|<\delta \Rightarrow \left| f(x)-f(y) \right| < \varepsilon$$

Se si suppone che $\left(A=\left\{a+\frac{b-a}{n}\cdot k \ \ k=0\dots n\right\}\right.$

$$\forall k=0,\dots,n-1 \quad |x_{k+1}-x_k|<\delta$$

ne segue che

$$\sup_{x\neq y\in[a,b]} \left| f(x)-f(y) \right| \overset{\text{Weierstrass}}{=} \max_{x\neq y\in[a,b]} |f(x)-f(y)|$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} f(x) - \min_{y\in[a,b]} f(y) \overset{\text{Heine Cantor}}{<} \varepsilon$$

Dunque, presa la suddivisione A_ε t.c.

$$x_{k+1}-x_k<\delta \quad \forall k=0\dots n-1$$

$$\Delta S(f,A_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left[\max_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) - \min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)\right]$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon$$

$$= \varepsilon\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = (b-a)\varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad A_\delta < \delta \quad S''(f,A_\delta)-S'(f,A_\delta)<\varepsilon$$

Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \\ (b)\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0 \\ (c)\ f \text{ continua } \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \text{Allora } \boxed{f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]}$$

dim

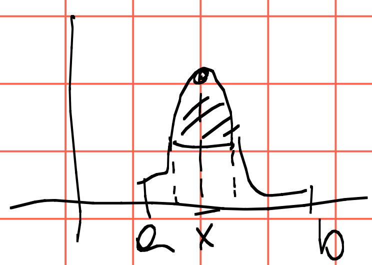
Per assurdo $\exists\, \bar{x} \in \,]a,b[$ t.c. $\boxed{f(\bar{x}) > 0}$: per il Teorema della permanenza del segno (f continua)

$\exists\,]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[\ \subseteq [a,b] \ : \ f(x) > \frac{f(\bar{x})}{2}$

$\forall x \in\,]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$

Considero la suddivisione

$$A = \{a,\ \bar{x}-\delta,\ \bar{x}+\delta,\ b\}$$



$$s'(f,A) = (\bar{x}-\delta-a)\cdot \min_{[a,\bar{x}-\delta]} f + (\bar{x}+\delta-\bar{x}+\delta)\cdot \min_{[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta]} f$$

$$+ (b-\bar{x}-\delta)\cdot \min_{[\bar{x}+\delta,b]} f$$

$$\geq 2\delta \cdot \min_{[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta]} f(x) \geq 2\delta \cdot \frac{f(\bar{x})}{2} = \delta f(\bar{x})$$

$$\begin{array}{c}\vee\\0\end{array}$$

$$\Rightarrow S'(f, A) > 0$$

$$\Rightarrow S'(f) > 0 \Rightarrow \int_a^b f\,dx > 0 \,!$$

<u>Assurdo</u>

Teorema (Integrale definito è lineare)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, R-Integrabili;

Allora (i) $f+g$ è R-Integrabile

(ii) $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

dim.

$$S'(f,A) + S'(g,B) \leq S'(f, A\cup B) + S'(g, A\cup B) = S'(f+g, A\cup B) \leq S'(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$S'(f) + S'(g) \leq S'(f+g) \quad (a)$$

Analogamente

$$S''(f,A) + S''(g,B) \geq S''(f, A\cup B) + S''(g, A\cup B) = S''(f+g, A\cup B) \geq S''(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$S''(f) + S''(g) \geq S''(f+g) \quad (b)$$

$(a) + (b) \longrightarrow \exists!$

Teorema (omogeneità R-Integrale)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R integrabile $k \in \mathbb{R}$

Allora (i) kf è R-Integrabile

(ii) $\int_a^b kf\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema (del confronto)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabili

$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Allora $\displaystyle\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$

dim

$$\forall \mathcal{A} \quad S'(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f$$

$$\wedge\!\!\!\!\!\!\;|$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \inf_{[x_k,x_{k+1}]} g$$

$$\|$$

$$S'(g,\mathcal{A})$$

$$\forall \mathcal{A} \quad S''(f,\mathcal{A}) \le S''(g,\mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \quad S'(f) \le S'(g)$$

e

$$S''(f) \le S''(g)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$$

dim dall'ipotesi segue che $S'(f) \leq S'(g)$

come pure $S''(f) \leq S''(g)$

$\lightning$

Teorema

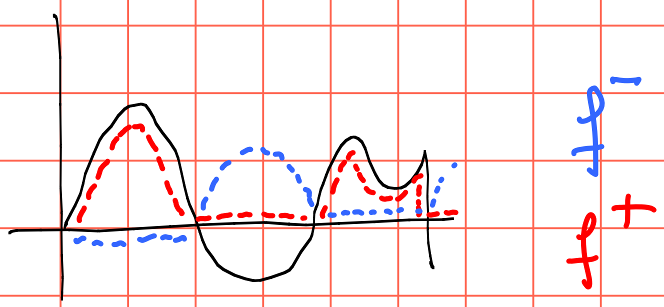
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile

Allora $|f|$, f^+ ed f^- sono R-integrabili

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

dim

$f^+ = \max\{f, 0\}$ $\qquad$ $f^- = \max\{-f, 0\}$



$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $\qquad$ $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

Inoltre $\sup[f^+] = [\sup f]^+$ $\qquad$ $\inf[f^+] = [\inf f]^+$

e dunque $\sup[f^+] - \inf[f^+] \leq \sup f - \inf f$

da cui segue che

$$S''(f^+, A) - S'(f^+, A) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)\left[\sup[f^+] - \inf[f^+]\right]$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)\left[\sup f - \inf f\right]$$

$$= S''(f,A) - S'(f,A)$$

e dunque f R-Integrabile $\Rightarrow f^+$ e f^- R-Integrabile

Essendo $|f| = f^+ + f^-$, ne segue – per la linearità – che anche $|f|$ è R-Integrabile

Infine

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_a^b f^+dx - \int_a^b f^-dx\right| \leq \int_a^b f^+dx + \int_a^b f^-dx$$

$$= \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>Oss</u> f R-Integrabile $\Rightarrow |f|$ R-integrabile

<u>Oss</u> $|f|$ R-Integrabile $\not\Rightarrow$ f R-Integrabile

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

f è limitata (ovvio) e <u>non è</u> R-Integrabile su $[0,1]$

però

$|f(x)| = 1$ è R-Integrabile su $[0,1]$

Teorema (Media Integrale)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-Integrabile (e quindi limitata)

Allora
$$\inf_{x\in[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{media integrale di } f \text{ su } [a,b]} \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

dim

Le funzioni $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ e $f(x)$ sono

R-Integrabili su $[a,b]$

Inoltre $\inf_{[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f \quad \forall x\in[a,b]$

Per il Teorema del confronto si ha

$$\int_a^b \left(\inf_{[a,b]} f\right) dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \left(\sup_{[a,b]} f\right) dx$$

e dunque

$$\left(\inf_{[a,b]} f\right)\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\sup_{[a,b]} f\right)\int_a^b dx$$

da cui segue

$$\left(\inf_{[a,b]} f\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\sup_{[a,b]} f\right)(b-a)$$

Dividendo tutto per il n.ro positivo $b-a$

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$$

Teorema (Corollario teorema della media)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

Allora f è R-integrabile ed $\exists\, z\in[a,b]$ t.c.

$$f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

dim

Il teorema della media dice che

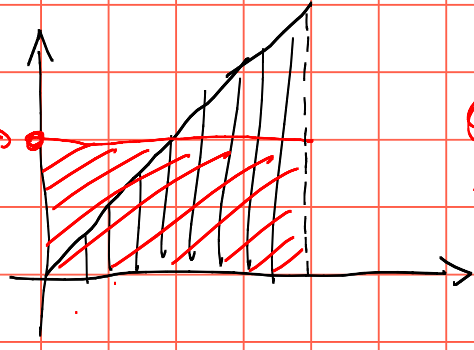
$$\min_{[a,b]} f \overset{\text{Weierstrass}}{=} \inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx \le \sup_{[a,b]} f \overset{\text{Weierstrass}}{=} \max_{[a,b]} f$$

Ma il teorema dei valori intermedi dice che $f(x)$ assume in $[a,b]$ tutti i valori compresi tra $\min f$ e $\max f$

dunque deve esistere

$z\in[a,b]$: $f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ↯

$\frac{1}{4-a}\int_0^4 f(x)\,dx$



Ovvero la media integrale è l'altezza di un rettangolo opportuno