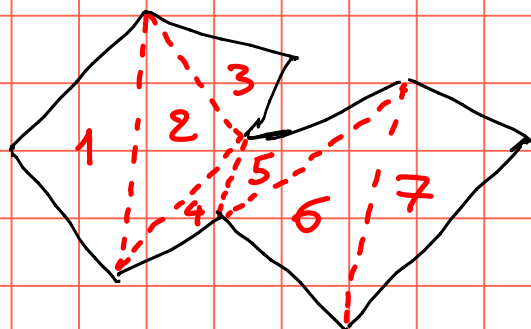


Problema dell'agumentore



• Si suddivide
in triangoli
e si calcolano
le aree dei
triangoli

• si sommano le aree dei triangoli

Archimede aveva ben chiaro

il "metodo di esaurimento", e

in particolare riferì bene come

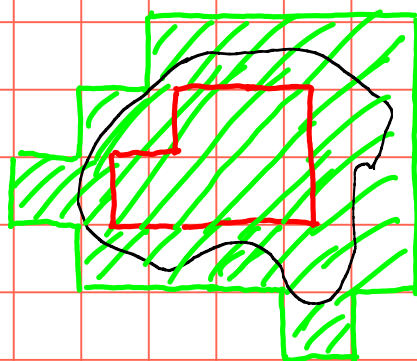
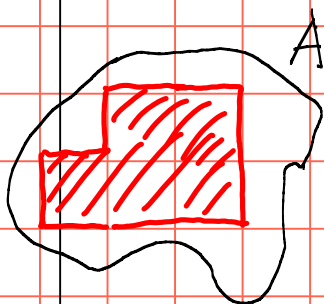
calcolare l'area di

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$$

parte sottografica di una parabola

INTEGRALE DEFINITO

Il problema delle aree



L'idea è molto semplice: ci approssima A

- dall'interno (5 quadrati, rossi)
- dall'esterno (21 quadrati, verdi)

e dunque la differenza $\text{Ext} - \text{Interno} = 17$

Se la griglia diventa più fitta (i quadrati più piccoli) ci ha che la differenza

$$\boxed{\text{Ext}(A) - \text{Int}(A)} \longrightarrow 0$$

ci può rendere piccola o piacere !!

Questo è l'approccio seguito da Riemann

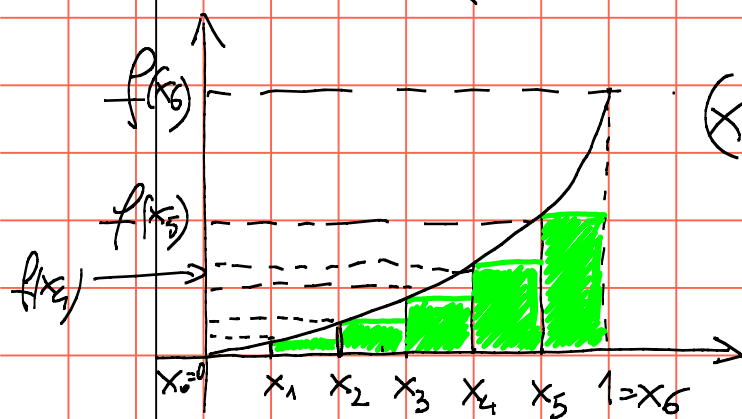
dato $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, ci considero

$$\text{Sottografico}(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$



e si cerca di approssimarlo dall'interno
e dall'esterno con dei "plurirettangoli"

Esempio $\text{Area} \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \right\} = \left[\frac{1}{3} \right]$

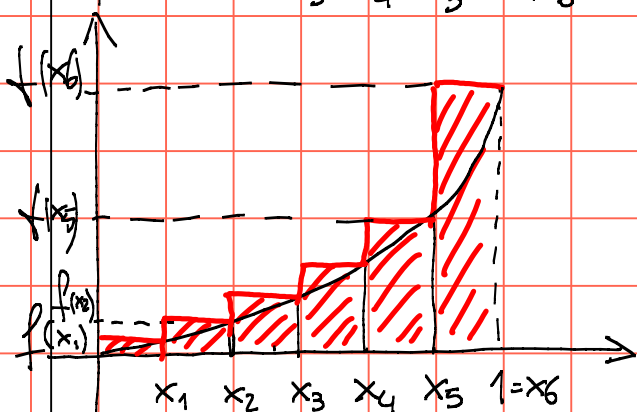


$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

Area (f) :

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_{k+1})$$

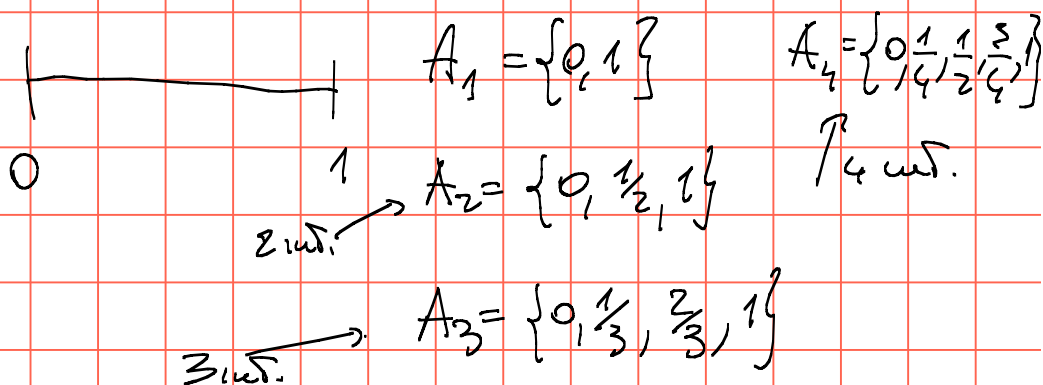


$$(x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \dots$$

Adesso si considera

$$A_n = \left\{ x_k = k \cdot \frac{1}{n} \mid k=0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$= \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < 1 \right\}$$



Solo' utile la formula

$$\sum_{k=0}^3 k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

approssimazione per defetto relativa a 4 punti equidistanti

$$\begin{aligned} S^1(f, A_3) &= \sum_{k=0}^2 (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0\right) \cdot 0 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{5}{27} \end{aligned}$$

$$S^1(f, A_4) = \sum_{k=0}^3 (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

approx per defetto relativa a 5 punti equidistanti

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{4} - 0\right) \cdot 0 + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

$$\frac{7}{32} > \frac{5}{27} !!$$

approx per ecceso relativa a 5 p.ti equidistanti

$$S^1(f, A_4) = \sum_{k=0}^3 (x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_{k+1})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{4} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot 1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} + \frac{16}{64} = \frac{30}{64}$$

approx per eccesso relativo

$$4 \quad S''(f, A_3) = \sum_{k=0}^2 (x_{k+1} - x_k) f'(x_{k+1})$$

punti equidistanti

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot 1^2$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{9}{27} = \frac{14}{27}$$

$$\frac{5}{27} < \frac{7}{32} < \frac{30}{64} < \frac{14}{27}$$

$$S'(f, A_2) \quad S'(f, A_4) \quad S''(f, A_4) \quad S''(f, A_3)$$

Abbiamo constatato che

$$S''(f, A_4) - S'(f, A_4) < S''(f, A_3) - S'(f, A_3) = \Delta S(f, A_3)$$

$$\Delta S(f, A_4)$$

per indovinare si può provare che $\Delta S(f, A_{i+1}) \leq \Delta S(f, A_i)$

$$S'(f, A_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) f'(x_k) \quad \begin{array}{l} x_k = \frac{k}{m} \\ x_{k+1} - x_k = \frac{1}{m} \end{array}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k^2}{m^2} = \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} k^2$$

$$= \frac{1}{m^3} \sum_{k=1}^{m-1} k^2 = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{(m-1+1)(m-1)(2m-2+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{m^3} \frac{2m^3 - 3m^2 + m}{6} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

$$S^1(f, A_m) = \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\frac{1}{m}} f(x_{k+1})$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k+1}{m} \right)^2$$

$$= \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2$$

$$\begin{aligned} k+1 &= h \\ k=0 &\rightarrow h=1 \\ k=m-1 &\rightarrow h=m \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m^3} \sum_{h=1}^m h^2$$

$$= \frac{1}{m^3} \cdot \frac{(m+1)m(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{m^3} \cdot \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Donc on a que $\forall m$

$$S^1(f, A_m) \leq \text{area}(\text{rectangles}) \leq S^1(f, A_m)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\text{donc on a que } \text{area}(\text{rectangles}) = \frac{1}{3}$$



Qm In modo perfettamente analogo si prova

$$\text{Area} \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x \} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Area} \{ \text{ " " " } 0 \leq y \leq x^3 \} = \frac{1}{4}$$

$$\text{---}$$
$$\text{Area} \{ \text{ " " " } 0 \leq y \leq x^k \} = \frac{1}{k+1} \text{ etc}$$

Sia ora $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

$[a,b]$ intervallo limitato e chiuso

Def Si dice "suddivisione di $[a,b]$ "

un insieme di $n+1$ punti,

$$A = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \}$$

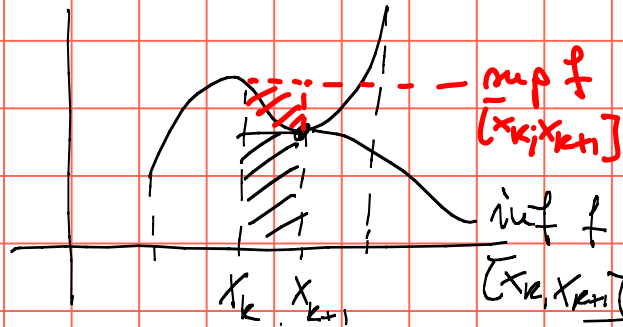
Qm $|x_i - x_{i-1}| \neq |x_j - x_{j-1}| \quad \forall i, j = 1, \dots, n$
in generale

Somme di Darboux per difetto

$$S'(f, A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \right]$$

Somme di Darboux per eccesso

$$S''(f, A) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \left[\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \right]$$



Si procede a definire

$$S'(f) = \sup_A S(f, A) = \text{integrale inferiore}$$

$$S''(f) = \inf_A S(f, A) = \text{integrale superiore}$$

e la funzione f mi dice

"R-Integrabile" e $\boxed{S'(f) = S''(f) = \int_a^b f dx}$
= integrale definito di f su $[a, b]$

Esempio $f(x) = x^2$ è R-Integrabile su $[0, 1]$

$$\int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

Esempio $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ non è

R-Integrabile su $[0, 1]$ infatti

$$\text{Dato } A = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è denso

in $[0, 1]$ ovvero preso $[x_k, x_{k+1}]$ esiste

certamente $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ t.c. $x_k < \bar{x} < x_{k+1}$

e dunque $\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(\bar{x}) = 1$

Ma anche $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $[0,1]$, ovvero

esiste $\bar{y} \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $x_k < \bar{y} < x_{k+1}$

e si ha $\inf_{[x_k, x_{k+1}]} f \leq f(\bar{y}) = 0$

Le queste considerazioni implicano che

$$S'(f, A) = 0 \quad \forall A \quad S''(f, A) = 1 \quad \forall A$$

e dunque f non è integrabile poiché

$$S'(f) = 0 < 1 = S''(f)$$

Come si comportano $S'(f, A)$ e $S''(f, A)$

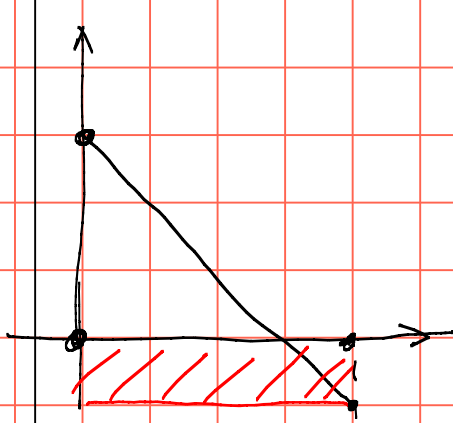
quando cambia A ?

Andiamo a considerare $f(x) = 3 - x$

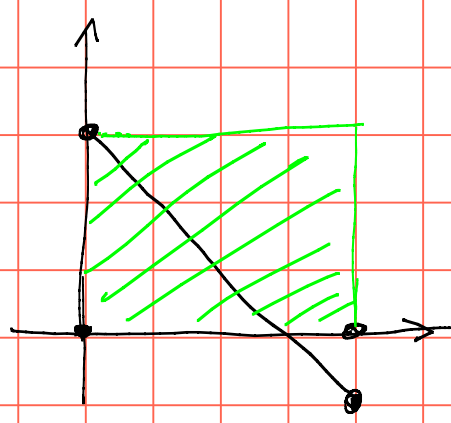
sull'intervallo $[0, 4]$. Prendiamo

delle suddivisioni a "passo costante"

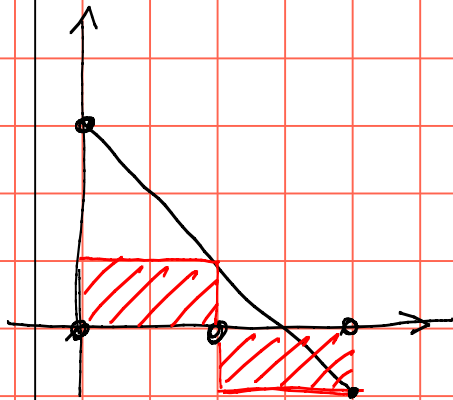
ovvero $A_m = \{x_h = h \cdot \frac{4}{m} \quad h = 0, 1, \dots, m\}$



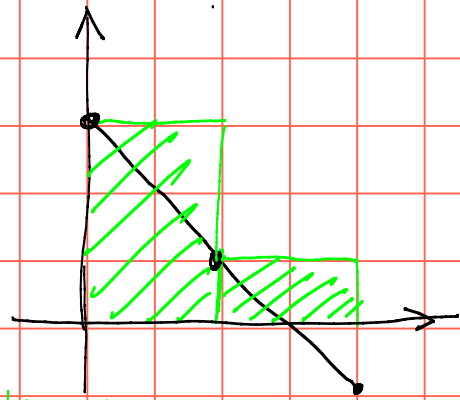
$$S'(f, A_1) = (4-0) \cdot \inf_{[0,4]} f = -4$$



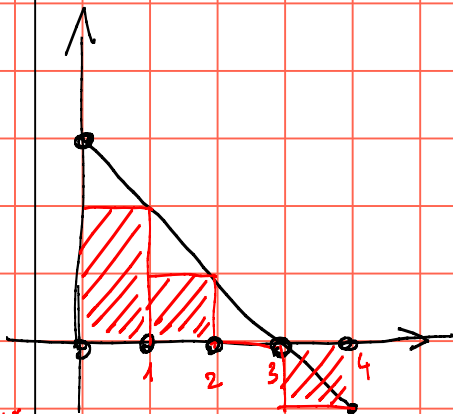
$$S''(f, A_1) = (4-0) \cdot \sup_{[0,4]} f = 12$$



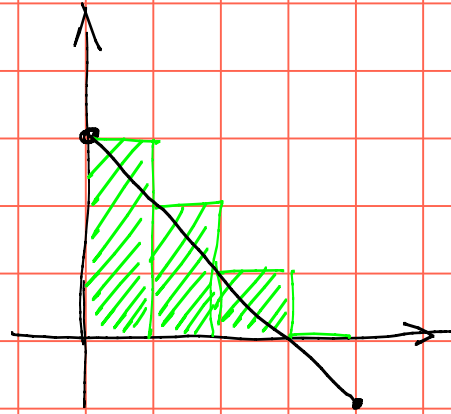
$$S'(f, A_2) = 2 \cdot \inf_{[0,2]} f + 2 \cdot \inf_{[2,4]} f = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$$



$$S''(f, A_2) = 2 \cdot \sup_{[0,2]} f + 2 \cdot \sup_{[2,4]} f = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$$



$$S'(f, A_4) = 1 \cdot \inf_{[0,1]} f + 1 \cdot \inf_{[1,2]} f + 1 \cdot \inf_{[2,3]} f + 1 \cdot \inf_{[3,4]} f = 2 + 1 + 0 + (-1) = 2$$



$$S''(f, A_4) = 1 \cdot \sup_{[0,1]} f + 1 \cdot \sup_{[1,2]} f + 1 \cdot \sup_{[2,3]} f + 1 \cdot \sup_{[3,4]} f = 3 + 2 + 1 + 0 = 6$$

Si osserva che

$$S'(f, A_1) \leq S'(f, A_2) \leq S'(f, A_4) \leq S'(f, A_n) \leq S''(f, A_n) \leq S''(f, A_1)$$

$\underbrace{-4}_{\text{red}} \quad \underbrace{0}_{\text{red}} \quad \underbrace{2}_{\text{red}} \quad \underbrace{6}_{\text{green}} \quad \underbrace{8}_{\text{green}} \quad \underbrace{12}_{\text{green}}$

Proseguendo in questo modo si arriva a provare

$$\text{che } S'(f) = S''(f) = 4!$$

Vale il seguente

Teorema (Suddivisioni)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Siano A e B due suddivisioni di $[a, b]$

$$\textcircled{1} \underbrace{A \subseteq B} \Rightarrow S'(f, A) \leq S'(f, B)$$

$$S''(f, B) \leq S'(f, A)$$

$$\textcircled{2} S'(f, A) \leq S''(f, B)$$

$$S'(f, B) \stackrel{2}{\leq} S''(f, A)$$