Lezione n.o 28

Titolo nota 28/11/2011

Venerdì 2 dicembre 14:30-16:30

Esercitazioni

La 1ª prova scritta consiste di 7 domande ognuna con 4 risposte

R_1

R_2

R_3

R_4

Risposte corrette +3

" errate -1

" non date $\emptyset$

↓ Se si raggiunge una certa soglia, si accede alla 2ª parte

2° scritto

Questo è fatto di 4 esercizi da svolgere per esteso

↓ Se la votazione complessiva di 1 e 2 è circa 18/30 si passa all'orale

Questo ha luogo circa 7 gg dopo lo scritto

Formula Taylor con resto di Peano

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile n volte $\forall x \in]a,b[$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ " $\quad n+1$ " in x_0

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Polinomio di Taylor centrato in x_0 relativo a f

Allora $$f(x) - P_n(x) = \underbrace{o\left(|x-x_0|^n\right)}_{\text{Resto (di Peano)}} \quad x \to x_0$$

Ts $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0}$$

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Ts eq $$\lim_{x \to x_0} \frac{f - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_{n-1}'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \qquad f'(x_0) = P_{n-1}'(x_0)$$

$$\overset{H}{=} \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_{n-1}^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Sviluppo di sen x

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f' = \cos x \quad f'' = -\operatorname{sen} x \quad f''' = -\cos x \quad f^{(IV)} = \operatorname{sen} x$

$x=0 \quad f(0)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=0 \quad f'''(0)=-1 \quad f^{(IV)}(0)=0 \quad f^{(V)}(0)=1$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$$

||| Sviluppo di sen x centrato x = 0

Si noti che il polinomio è dispari in x

$x=\frac{\pi}{2} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1 \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^5\right)$$

Sviluppo di sen x centrato in $x = \pi/2$

Si noti che il polinomio è pari, nelle potenze di

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Teorema (Formula Taylor con il resto di Lagrange)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$ volte $\forall x \in]a,b[$

$\to P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Allora $\exists z$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$f(x) - P_n(x) = R_n(z)$$

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Oss

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(z)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \frac{(x-x_0)^{\cancel{n+1}\ 1}}{\cancel{(x-x_0)^n}}$$

$$x \to x_0 \implies z \to x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot 0 = 0$$

Dunque $R_n(z) = o(|x-x_0|^n)$

Idea della dim: si applica ripetutamente il Teorema di Cauchy ad un rapporto opportuno

$g(t) = f(t) - P_n(t) \qquad g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n+1)}(x_0) = 0$

$$h_k(t) = (t-x_0)^k \qquad h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(m+1)}(x_0) = 0$$

$k = 0, \dots, m+1$

$$\frac{g(t)-g(x_0)}{h_{m+1}(t)-h_{m+1}(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{g'(x_1)}{h'_{m+1}(x_1)} \qquad x_0 < x_1 < t$$

$$= \frac{f'(x_1)-P'_m(x_1)}{(m+1)(x_1-x_0)^m} = \frac{f'(x_1)-P'_m(x_1)}{(m+1)\, h_m(x_1)}$$

ora $g'(x_0) = f'(x_0) - P'_m(x_0) = 0 \quad h_m(x_0) = 0$

$$\frac{g'(x_1)}{(m+1)\, h_m(x_1)} = \frac{g'(x_1)-g'(x_0)}{(m+1)(h_m(x_1)-h_m(x_0))} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{g''(x_2)}{(m+1)\, h'_m(x_2)} \qquad x_0 < x_2 < x_1$$

$$= \frac{f''(x_2)-P''_m(x_2)}{(m+1)\cdot m\cdot (x_2-x_0)^{m-1}} = \frac{f''(x_2)-P''_m(x_2)}{(m+1)\, m\, h_{m-1}(x_2)}$$

Proseguendo in questo modo

$$\frac{f(x)-P_m(x)}{(x-x_0)^{m+1}} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(x_1)-P'_m(x_1)}{(m+1)(x_1-x_0)^m} = \frac{f''(x_2)-P''_m(x_2)}{(m+1)\, m\, (x_2-x_0)^{m-1}}$$

$$= \dots = \frac{f^{(m+1)}(x_{m+1}) - P_m^{(m+1)}(x_{m+1})}{(m+1)!}$$

$$= \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!} \qquad \text{in quanto } P_m^{(m+1)}(x) = 0$$

$$z = x_{m+1}$$

che è la Tesi

Esempio

$$\sqrt{65} = \sqrt{1+64} = 8\underbrace{\sqrt{1+1/64}}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

$$f'(0) = 1/2 \qquad f''(0) = -1/4$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{(1+z)^{5/2}}\right)x^3$$

$$\sup_{x\in[-1/64,\,1/64]} \left|\frac{1}{16}\,\frac{x^3}{(1+z)^{5/2}}\right| \le \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^3\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{64}\right)^{5/2}}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 8^{\cancel{7}\,2}}\cdot\frac{\cancel{8^5}}{(63)^{5/2}} = \frac{1}{128\cdot(63)^{5/2}}$$

$$8\sqrt{1+1/64} = 8\left(1+\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) \pm \frac{1}{128\cdot(63)^{5/2}}$$

$$= 8 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8^4} \pm \frac{1}{128\cdot(63)^{5/2}}$$

f derivabile $(n+1)$ volte in $]a,b[$

$x_0 \in]a,b[$

$$\boxed{f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = R_n(z)}$$

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

z compreso tra x e x_0

Se f è derivabile ∞ volte in $]a,b[$

$x_0 \in]a,b[$

$$\sup_{]a,b[} R_n(z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

allora $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Esempio

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{} = R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

z è un numero compreso tra 0 e x

prendo un intervallo $[-a, a]$

$$\sup_{x\in[-a,a]} |R_n(z)| = \sup_{x\in[-a,a]} \left| \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{e^a}{(n+1)!} \cdot a^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^a \cdot \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$A_{n+1} = e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \cancel{e^a} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{\cancel{e^a}} \frac{n!}{a^n}$$

$$= \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow A_{n+1} = e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in]-a, a[$$

$\forall a$

$$\Downarrow$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\| $$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{-1/x^2}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \longmapsto f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \log(1+x) \longrightarrow f'(x) = 1/{1+x}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x \longrightarrow f' = 1/{1+x^2}$

Antiderivazione

<u>Def</u> $f : I \to \mathbb{R}$, diciamo che $F : I \to \mathbb{R}$ è una "primitiva di f" <u>se</u>

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \forall n \neq -1$

$f(x) = 1/x \longrightarrow F(x) = \log|x| + c$

$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \longmapsto F(x) = -\cos x + c$

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \operatorname{sen} x + c$

Di derivate ne trovo 1 sola (se $\exists$!)

Di primitive quante ne trovo?

∞

Teorema

Date F e G due primitive di f

allora $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$

dim

$$\left(F(x) - G(x)\right)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\forall x \in I$ intervallo

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$ $\lightning$

Oss Se $\frac{x^2}{2}$ è una primitiva di x

allora $\frac{x^2}{2} + \frac{10}{\pi}$ è una primitiva di x

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \qquad \left(\frac{x^2}{2} + \frac{10}{\pi}\right)' = x$$

derivata

$$f \longrightarrow f'$$

$$f \longrightarrow F + c$$

primitiva

Def Data $f : I \to \mathbb{R}$, diciamo Integrale indefinito di f (su I)

$$\int f(x)\,dx = \{\text{primitive di } f\}$$

$$= \{F : I \to \mathbb{R} \;:\; F'(x) = f(x) \;\forall x \in I\}$$

$$= F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$F'(x) = f(x)$$

Esempi

$f(x) = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$ non ha primitive

$F(x)$ x assurdo sia una primitive

$$\begin{cases} F'(x) = 0 & \forall x < 0 \\ F'(x) = 0 & \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = c_1 & \forall x < 0 \\ F(x) = c_2 & \forall x > 0 \end{cases}$$

ma f deve essere derivabile, e quindi continua, e dunque

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \Rightarrow c_1 = c_2 = F(0)$$

$F(x) = \text{cost.} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad F'(x) \neq f(x)$

Assurdo

Teoremi derivate | Teoremi Integrazione

$(f+g)' = f' + g' \longleftrightarrow \int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$(f \cdot g)' = f'g + fg' \longleftrightarrow$ Integraz. x parti

$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \longleftrightarrow$ Integr. per sostit.

Teorema

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ aventi come primitive F, G rispettivamente

se $f = g \ \forall x \in I$ allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$F(x) = G(x) + c$

dim

segue immediatamente dal fatto che

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = 0 \ \forall x \in I$$

$\not{c}$

Integrazione per decomposizione in somma

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Esempio

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + c$$

$\not{c}$

Integrazione per parti

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)\right]dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$C\in\mathbb{R}\quad \underbrace{f(x)\cdot g(x) + C}_{\text{insieme di funzioni}} = \underbrace{\int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx}_{\text{insieme di funzioni}}$$

$$\underbrace{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx}_{\text{insieme di funzioni}} = \underbrace{f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}_{\text{insieme di funzioni}}$$

Ricordare

$$\boxed{\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx}$$

$$\int \underbrace{x}_{u'}\underbrace{e^x}_{v}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx$$

ma questo è peggio del precedente

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^x}_{v} =$$

$$= xe^x - e^x + C \qquad C\in\mathbb{R}$$

Adesso si può fare la verifica!

$$\frac{d}{dx}\left(xe^x - e^x + c\right) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} + 0$$
$$= xe^x \quad ✓$$

Esempio n°2

$$\int \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{e^x} = \underset{u}{x^2}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{2x}\,\underset{v}{e^x}\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\left[\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2\left[\underset{u}{x}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{e^x}\,dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\right)' = x^2e^x \quad ✓$$

Esempio

Calcolare $\int x^3e^x\,dx$

Calcolare $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$