

Lezione nro 26

Titolo nota

25/11/2011

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su I intervallo

$$\textcircled{1} \left(f'(x) = 0 \ \forall x \in I \right) \Leftrightarrow \left(f(x) = \text{cost.} \ \forall x \in I \right)$$

$$\rightarrow \textcircled{2} \quad f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x) \nearrow \text{ su } I$$

$$\rightarrow \textcircled{3} \quad f'(x) < 0 \quad " \Rightarrow f(x) \searrow \text{ su } I$$

$$\text{Dom} \quad f(x) \nearrow \text{ su } I \Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in I?$$

$$\text{No} \quad f(x) = x^3 \quad \text{è} \nearrow \text{ su } \mathbb{R}$$

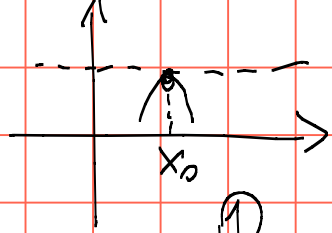
$$\text{però} \quad f'(x) = 3x^2 \quad \text{si annulla in } x_0 = 0!$$

Def $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$

x_0 si dice "punto stazionario" per f

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

ovvero la retta T_g in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale



①

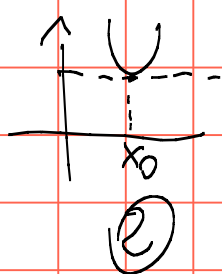
①

$$\exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$f' = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$



②

Altri casi

②

$$f' = \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

③

f' non cambia segno!

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo f derivabile

$x_0 \in I$ $\swarrow$ interno di I
 (razionario per f)

$$\textcircled{1} \exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I \text{ t.c. } f'(x) \begin{cases} > 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ < 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

allora x_0 è p.to di massimo relativo
 interno

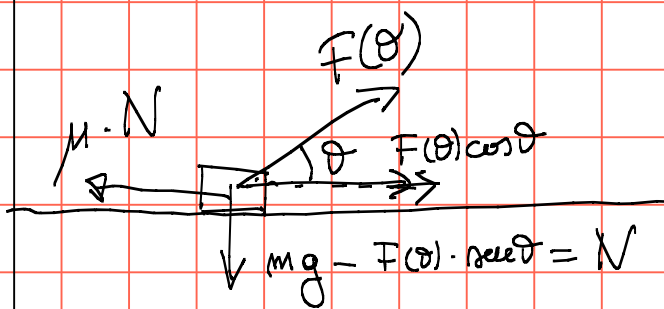
$$\textcircled{2} \exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I \text{ t.c. } f'(x) \begin{cases} < 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ > 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

allora x_0 è p.to di minimo
 relativo interno

$$\textcircled{3} \exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I \text{ t.c. } f' \text{ non cambia segno}$$

x_0 non è né max né min rel. interno

Esercizio 13.7.1 Sia dato un corpo di massa m appoggiato su un piano scabro con coefficiente di attrito μ , a cui sia concesso di muoversi sul piano lungo una retta fissata r . Si supponga che al corpo sia applicata una forza $\vec{F}$ la cui direzione forma un angolo $\theta \in]0, \pi/2[$ con la retta r . Determinare l'angolo θ che rende minimo il modulo della la forza $\vec{F}$ necessaria a muovere il corpo.



$$T = F(\theta) \cos \theta - \mu N$$

$$= F(\theta) \cos \theta - \mu mg + \mu F(\theta) \sin \theta \geq 0$$

$$T=0 \quad \text{per} \quad F(\theta) \cdot (\cos \theta + \mu \sin \theta) = \mu mg$$

$$\text{per} \quad F(\theta) = \frac{\mu mg}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

$$F(0) = \mu mg \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = mg$$

Vogliamo il $\min F(\theta)$

$$F'(\theta) = 0 \quad \text{per} \quad \mu mg \frac{(-\sin \theta + \mu \cos \theta)}{(\cos \theta + \mu \sin \theta)^2} = 0$$

$$\text{per} \quad \tan \theta = \mu \quad \text{per} \quad \boxed{\bar{\theta} = \arctan \mu}$$

$$F(\bar{\theta}) = \frac{\mu mg}{\cos \bar{\theta} + \mu \sin \bar{\theta}} = \mu mg \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) \cdot (mg)$$

Esercizio 13.7.2 Provare che, tra tutti i rettangoli aventi area S fissata, quello di perimetro minimo è il quadrato di lato $\sqrt{S}$.

$$\min \{ 2(a+b) : \underbrace{a \cdot b = S}_{\substack{a > 0, b > 0 \\ \text{fissato}}} \} \quad \text{ph in 2 variabili}$$

$$b = \frac{S}{a}$$

$$\min \left\{ 2 \left(a + \frac{S}{a} \right) \quad a > 0 \right\}$$

$$\min \left\{ \underbrace{2 \left(x + \frac{S}{x} \right)}_{f(x)} \quad x > 0 \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

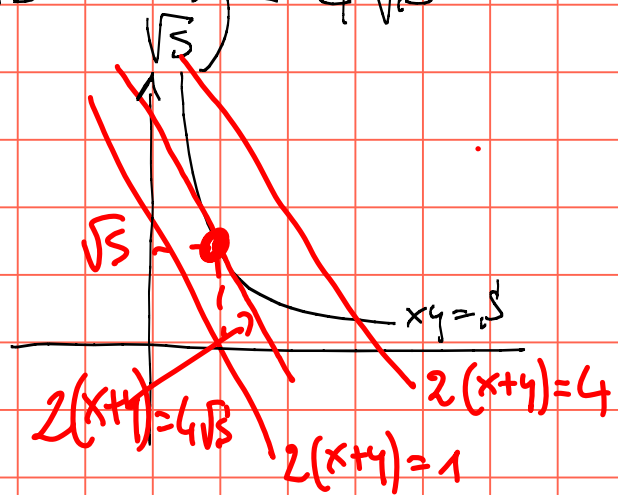
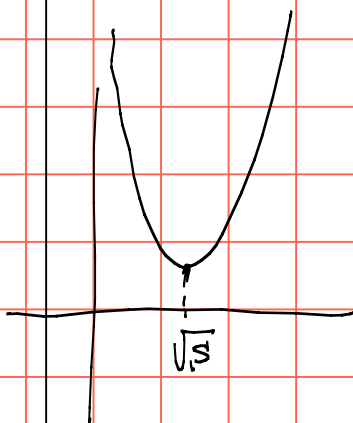
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x$$

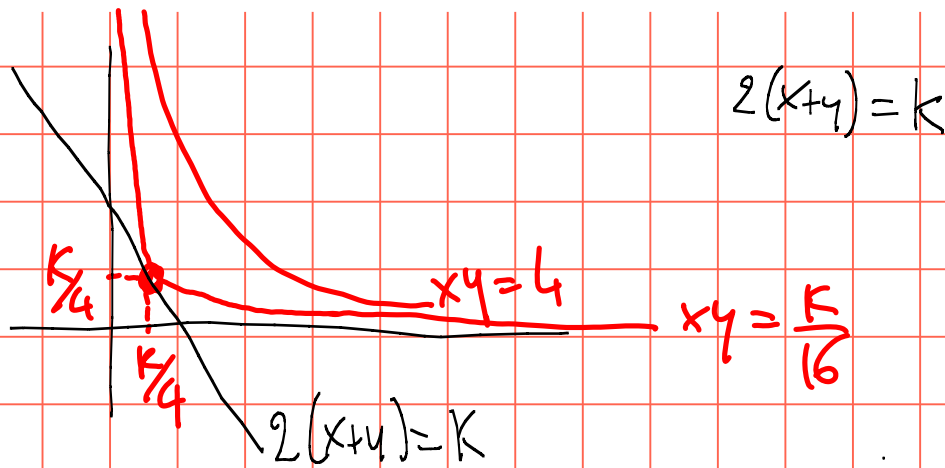
$$f'(x) = 2 - 2 \frac{S}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = S$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{S}$$

$$f(\sqrt{S}) = 2 \left(\sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} \right) = 4\sqrt{S}$$



Esercizio 13.7.3 Provare che, tra tutti i rettangoli aventi perimetro $2p$ fissato, quello di area massima è il quadrato di lato $p/2$.



$$\max \{ xy : 2(x+y) = K \}$$

$$x+y = \frac{K}{2}$$

$$y = \frac{K}{2} - x$$

$$\min \{ \underbrace{x \left(\frac{K}{2} - x \right)}_{f(x)} : x > 0 \}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{K}{2} - x - x = 0$$

$$f' = \frac{K}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{K}{4}$$

$$f\left(\frac{K}{4}\right) = \frac{K}{4} \left(\frac{K}{2} - \frac{K}{4} \right) = \frac{K^2}{16}$$

Definizione 13.5.1 Sia data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. Si dice che f è convessa su I se fissati comunque $x, y \in I$ con $x < y$, si ha

$$(13.35) \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in]0, 1[.$$

f è strettamente convessa su I quando la disuguaglianza in 13.35 è stretta.

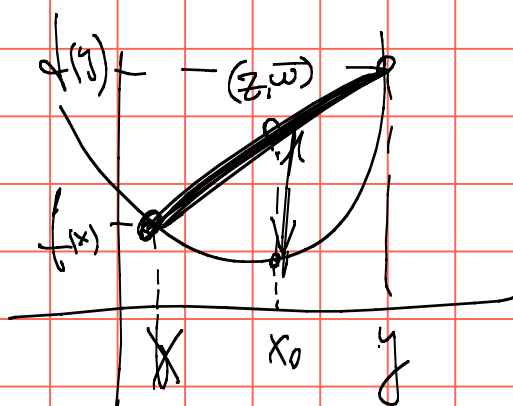
Si dice che la funzione f è (strettamente) concava se $-f$ è (strettamente) convessa.

$$(x, f(x)) \quad (y, f(y))$$

Il segmento che li congiunge ha eq.

$$(z, w) \equiv (1-t)(x, f(x)) + t(y, f(y)) \quad t \in]0, 1[$$

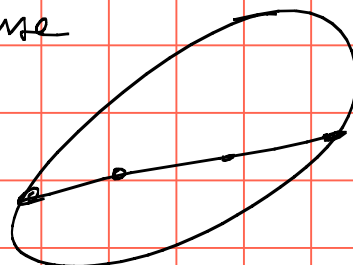
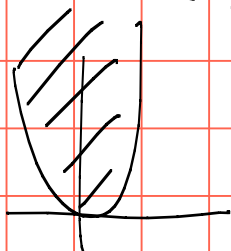
$$\begin{cases} z = (1-t)x + ty \\ w = (1-t)f(x) + tf(y) \end{cases} \quad f(z(t)) \leq w$$

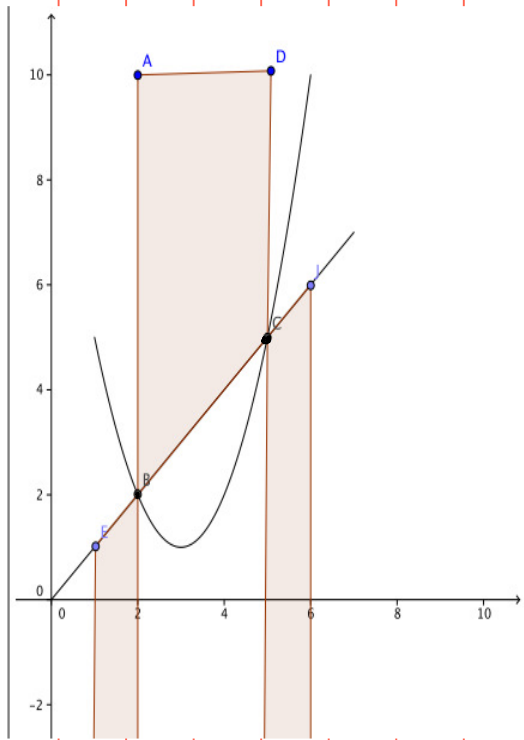


$$t = \frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

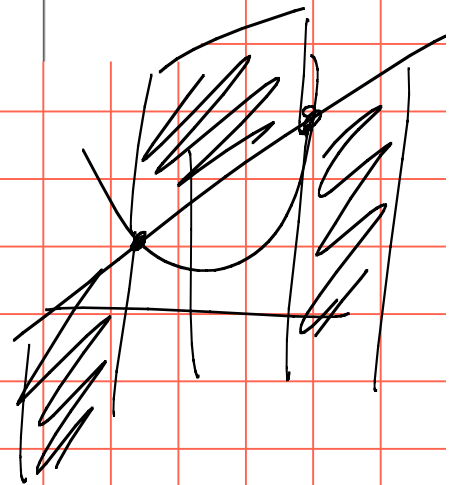
$$t = \frac{1}{3} \quad f\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) \leq \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y)$$

f concave se $-f$ convessa





$f(x) = |x|$ è convessa

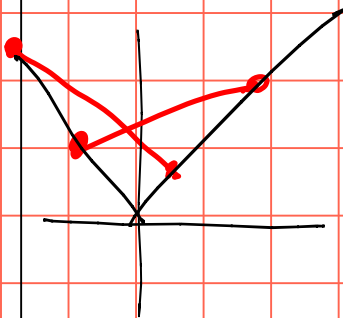


$$f((1-t)x + ty) = |(1-t)x + ty|$$

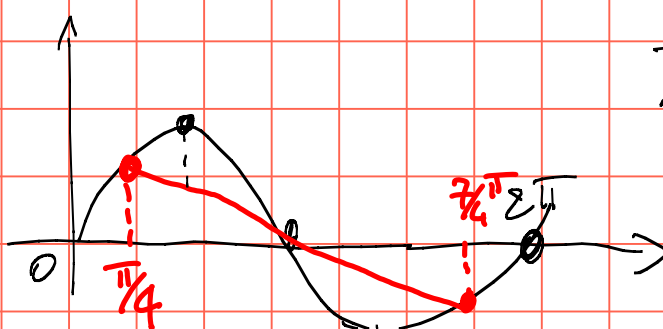
$$\leq |(1-t)x| + |ty|$$

$$\leq (1-t) \cdot |x| + t \cdot |y|$$

$$= (1-t) f(x) + t f(y)$$



$f(x) = \sin x$ non è convessa su $[0, 2\pi]$



$$\frac{\pi}{2} = (1-t) \frac{\pi}{4} + t \frac{3\pi}{4}$$

$$2 = 1-t + 3t$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\frac{7\pi}{4}\right) > \frac{5}{6} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\parallel$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\parallel$$

$$1$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

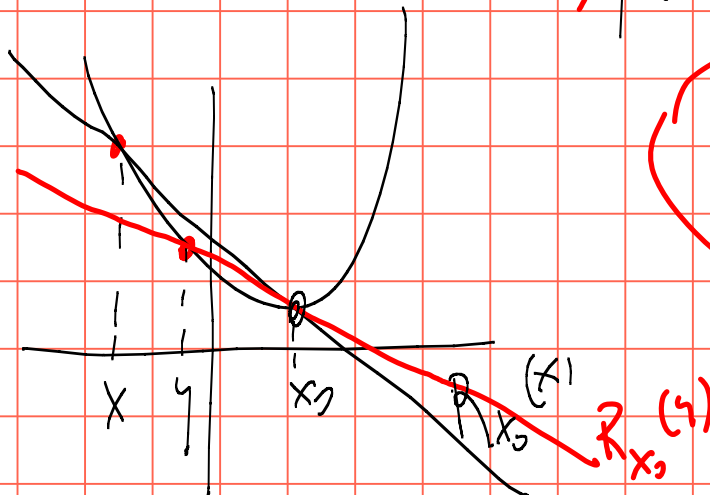
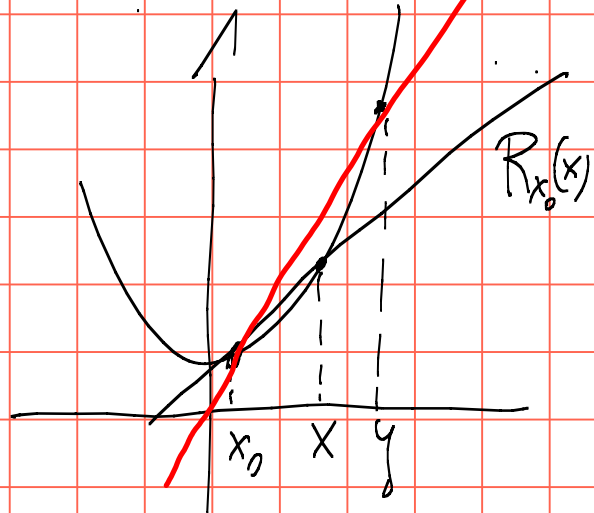
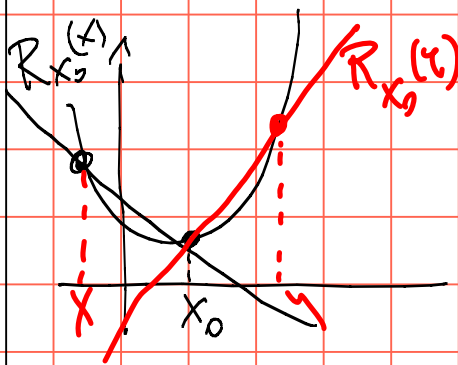
Teorema 13.5.6 Sia data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti tra loro le seguenti affermazioni

(i) f è (strettamente) convessa su I .

(ii) Per ogni $x_0 \in I$ il rapporto incrementale

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è crescente!
su $I \setminus \{x_0\}$



$\{Q_m\}_m$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

f è dirett. convessa o.e. $\forall x \ R_{x_0}(x)$
su $I \setminus \{x_0\}$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad x \neq x_0$$

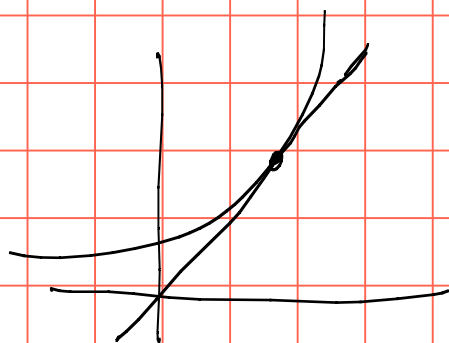
Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

f dirett. convessa (convessa)

o.e.

$$\forall x_0 \in I \quad \exists \quad f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

essendo $R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Teorema

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa allora f è continua
su I $f(I) = I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) - f(x_0)) = f'_-(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) = 0$$

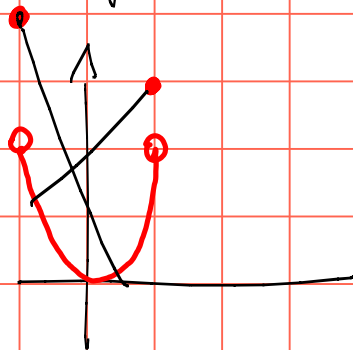
$$\stackrel{1)}{\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$= f'_+(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

f continua in x_0



$$f(x) = \begin{cases} 4 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo derivabile
 $\forall x \in I$

Sono equivalenti

1) f strettamente convessa (concava)

2) $f'(x)$ crescente (decrescente)

Diciamo

$$f \text{ strettamente convessa} \Rightarrow \forall x_0 \in I \quad f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$$

essendo

f derivabile

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in I \exists f'(x_0)$$

f strett. convessa

vale che

$$x < x_0 < y$$

$$R_{x_0}(x) < R_{x_0}(y) \quad \forall x < y$$

"

$$R_x(x_0)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow x} R_x(x_0) = f'(x) < \lim_{y \rightarrow x_0} R_{x_0}(y) = f'(y)$$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = R_x(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte
 I intervallo

$$f \text{ strett. convessa (concave)} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

(≤ 0)

Si osserva

$$f'(x) \nearrow \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

$\Downarrow$

f strett. convessa

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo
 f derivabile

f convessa (concava) se $f' \nearrow$ ($\searrow$)

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo
 f derivabile 2 volte

f è convessa (concava) se $f''(x) \geq 0$ ($\leq$)

Def $x_0 \in I$ è punto di flesso per f
se in x_0 la funzione passa da
convessa a concava (o viceversa)

Esempio $f(x) = \sin x$ $x \in [\bar{0}, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x = 0 \quad \text{se} \quad x=0, x=\pi, x=2\pi$$

in $x=\pi$ ho p.to di flesso

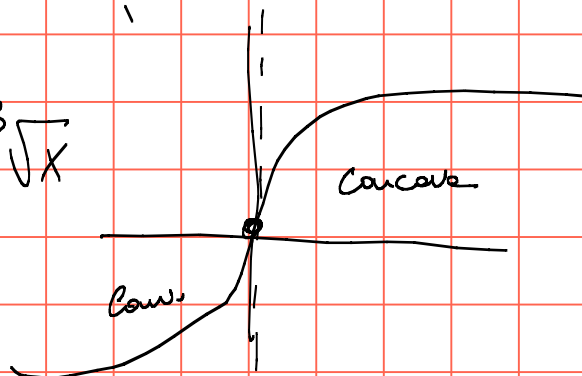
di flesso



in $(0, \pi)$ concave

(π, ∞) concave

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



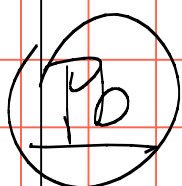
$$f' = -\frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$f'' = -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-5/3} = 2x^{-5/3}$$

flesso e tg verticale

$f(x) = x^3$ ha in $x=0$ un flesso

e Tangente orizzontale



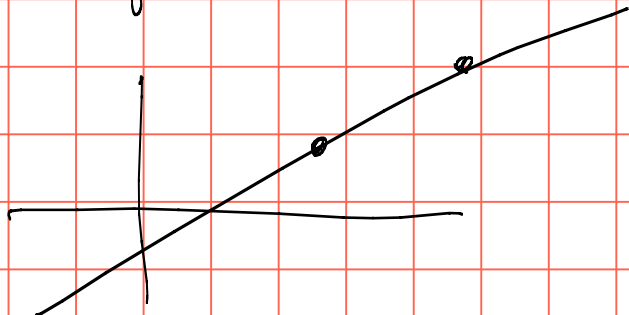
f monotona $\nearrow$ e concava

allora f^{-1} monotono $\nearrow$ e concavo

Ci sono f. ni concave e concave?

Sono le f. ni lineari

$$f(x) = ax + b$$



Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo f derivabile
2 volte

x_0 punto stazionario

① $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è p.to di minimo
relativo interno

② $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è p.to di massimo
relativo interno

③ $f''(x_0) = 0$ indecidibile



Teorema (l'Hopital) $\left(\frac{0}{0}\right)$

$g, f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$$a) \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

$$b) \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$c) g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$g(a) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad a < z < x$$

Cauchy

$$\downarrow x \rightarrow a$$

$$L$$

$$L$$

(%)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^5} =$$

$$\updownarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4} =$$

$$\updownarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{20x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{60x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{120x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{120} = \frac{1}{120}$$