

Domani ore 1030 Aula L Esercizi

1430 " " Teoria

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\stackrel{(*)}{\rightarrow}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (\quad) \cdot \lim (\quad)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad x_0, l \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Teorema

• $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.d.a $f^{-1}(f(A) \cap B) = C$ $x_0 \in C$

• $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ $y_0 = f(x_0)$ p.d.a per B $y_0 \in B$

• f derivabile in x_0

• g " " $f(x_0)$

$$(C \subseteq A)$$

allora $(g \circ f)(x)$ derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

dim

g è derivabile (differenziabile) in $y_0 = f(x_0)$

$$g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (y - f(x_0)) + o(y - f(x_0))$$

$y \rightarrow y_0 = f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$$

ed inoltre, essendo f diff. in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$(x \rightarrow x_0)$

$$\rightarrow g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (y - f(x_0)) + o(y - f(x_0))$$

$y \rightarrow y_0 = f(x_0)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \right) \\ + o \left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \right) \\ x \rightarrow x_0$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \boxed{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)} (x-x_0) + o(x-x_0) \\ (x \rightarrow x_0)$$

$$(d(g \circ f))(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \swarrow$$

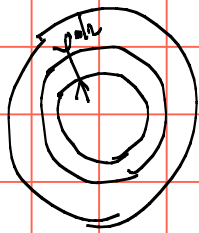
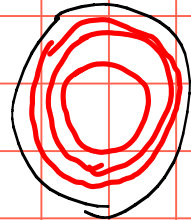
Esempio interessante

① Dato un cerchio di raggio r

$$A_r = \text{area cerchio (in funzione di } r) \\ \equiv \pi r^2$$

$$C_r \equiv \text{lunghezza circonferenza raggio } r \\ \equiv 2\pi r$$

$$\frac{dA_r}{dr} = \frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r$$



Sfera di raggio r

$$V_r = \text{Volume sfera} \equiv \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$S_r \equiv \text{Superf. " } \equiv 4\pi r^2$$

$$\frac{dV_r}{dr} = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \equiv 4\pi r^2$$

importante

- Se $g'(x)$ è continua in x_0 allora $\exists g'(x_0)$

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)$$

Domanda Se $\exists g'(x_0)$ allora $g'(x)$ è continua in x_0 ?

- Il viceversa non è vero

può esistere $f'(x_0)$ senza che f' sia continua in x_0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

In $x_0 = 0$ mi calcolo $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left(\sin \frac{1}{x} \right) = 0 = f'(0)$$

↑ ↑
infinito limitato

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad f'(x) &= \left(x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = 2x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \left(-\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \cdot \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

f' continua in $x=0$?

?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \cos y \quad \text{[crossed out]}$$

$$\exists y_m = 2m\pi \quad \cos 2m\pi = 1 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

$$\exists z_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = 0 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{[crossed out]}$$

Derivate seconde etc

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \right)(x)$$

ovvero è la derivata della derivata

prima

$$z = g(y) \quad y = f(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = f''(x)$$

$f^{(n)}(x)$
"

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) = f'''(x) \quad \dots \quad \frac{d^m f}{dx^m} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} \right)$$

Def In generale $CE(f') \subseteq CE(f)$

ovvero

Una funzione non è detta ric derivabile

in tutti i punti del suo dominio

Esempio $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$CE(f) = [0, +\infty[$$

$$CE(f') =]0, +\infty[$$

$$f(x) = |x|$$

$$CE(f) = \mathbb{R} \supsetneq \mathbb{R} \setminus \{0\} = CE(f')$$

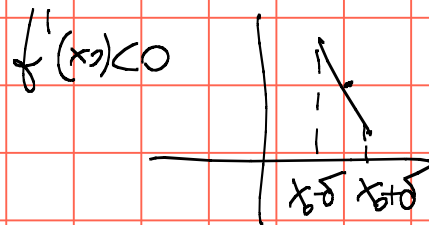
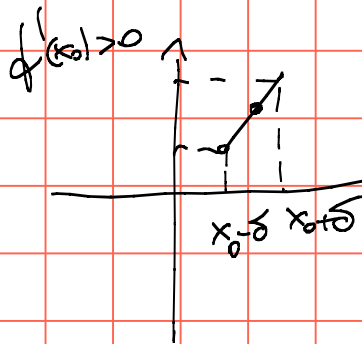
Teorema 13.4.1 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.

(i) Se $f'(x_0) > 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) < f(x) & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$

(ii) Se $f'(x_0) < 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

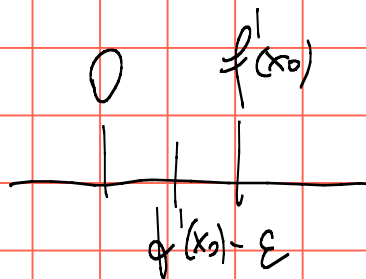
$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) > f(x) & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$



(i) $f'(x_0) > 0$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in I \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$f'(x_0) - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \epsilon$$



$$\epsilon = \frac{f'(x_0)}{2} \quad \exists \delta : \forall x \in I \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f'(x_0)}{2}$$

$$x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f'(x_0)}{2}$$

$$x \in I \quad \begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 \\ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x) - f(x_0) &< \frac{f'(x_0)}{2} (x - x_0) \\ f(x) - f(x_0) &> \frac{f'(x_0)}{2} (x - x_0) \end{aligned}$$

≤ 0
 $\rightarrow 0$

$$x \in I \quad \begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 \\ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x) &< f(x_0) \\ f(x) &> f(x_0) \end{aligned}$$

Teorema 13.4.2 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.

(i) Se f monotona crescente, allora $f'(x_0) \geq 0$

(ii) Se f monotona decrescente, allora $f'(x_0) \leq 0$

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} &f \text{ derivabile in } x_0 \quad (\exists f'(x_0)) \\ &f \nearrow \quad (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad x \in I \quad x < x_0 \quad f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in I \quad x - x_0 < 0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad x \in I \quad x > x_0 \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in I \quad x - x_0 > 0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \geq 0$$

Definizione 13.4.3 (Minimo e massimo locale) Data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,

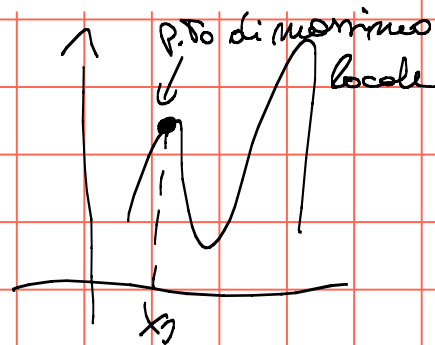
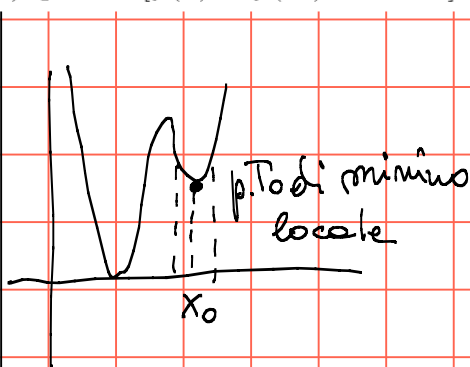
(i) un punto $x_0 \in I$ si dice **punto di minimo locale** per f se esiste un intorno $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tale che x_0 è punto di minimo per $f|_{U_{x_0}}$ ovvero se

$$\text{per ogni } x \in U_{x_0}, f(x_0) \leq f(x).$$

(ii) un punto $x_0 \in I$ si dice **punto di massimo locale** per f se esiste un intorno $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tale che x_0 è punto di massimo per $f|_{U_{x_0}}$ ovvero se

$$\text{per ogni } x \in U_{x_0}, f(x) \leq f(x_0).$$

Entrambe le definizioni diventano strette (ovvero il $>$ prende il posto del $\geq$) quando $[f(x) = f(x_0) \iff x_0]$.



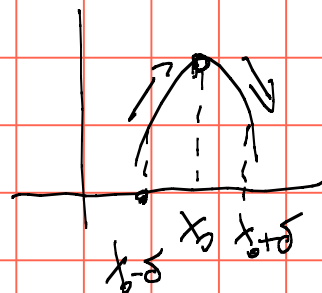
FERMAT

Lemma 13.4.4 (Lemma di Fermat) Sia data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continua e derivabile su I . Se $x_0 \in I$ è un punto di massimo (minimo) locale interno, allora $f'(x_0) = 0$.

I è un intervallo

x_0 p.to di massimo locale

$$\exists]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$$



$$\begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 \\ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

$$f(x_0) \geq f(x)$$

$$f(x_0) \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\delta < x - x_0 < 0 \\ 0 < x - x_0 < \delta \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{ma } \exists f'(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$



Teorema 13.4.5 (Teorema di Rolle) Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa alle seguenti ipotesi:

- (i) f continua per ogni $x \in [a, b]$;
- (ii) f derivabile per ogni $x \in]a, b[$;
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $z \in]a, b[$ tale che $f'(z) = 0$.

Om $f(a) = f(b)$ serve a "generare" un max (min) locale in z !!

Dim

Teorema Weierstrass

f continua su $[a, b] \Rightarrow \exists x_m \in [a, b] \quad x_M \in [a, b]$

$$\text{t.c.} \quad f(x_m) = \min f([a, b])$$

$$f(x_M) = \max f([a, b])$$

$$(i) \quad \{x_m, x_M\} \subseteq [a, b] \quad \left(\begin{array}{l} \text{ipotesi di} \\ \text{max e minimo} \\ \text{condono negli estri} \end{array} \right)$$

$$\max f([a, b]) = \min f([a, b]) \quad \text{poich\u00e9 } f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow f \text{ costante} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

$$(ii) \quad \{x_m, x_M\} \not\subseteq [a, b]$$

$$\Rightarrow x_m \in]a, b[\quad (\text{oppure } x_M \in]a, b[)$$

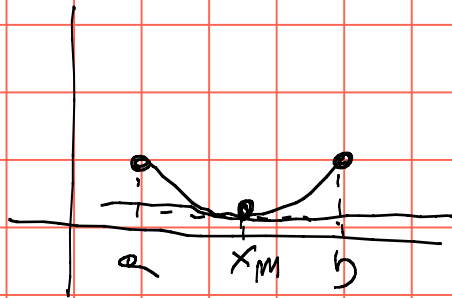
$$\Rightarrow \text{supponiamo } x_m \in]a, b[$$

Ma allora x_m è punto di minimo interno
per $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$

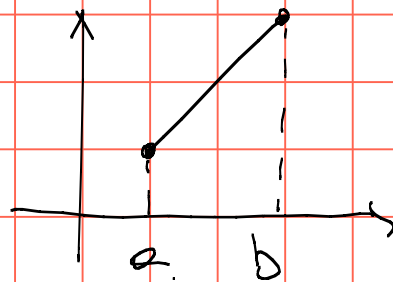
Lemma fermato



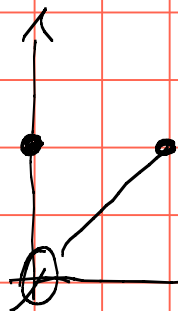
$$f'(x_m) = 0$$



Qm



$f(x) = x$ soddisfa
tutte le ipotesi
ma non $f(a) = f(b)$
però $f'(x) = 1 \neq 0$

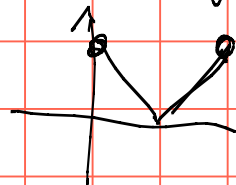


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

soddisfa tutte le
ipotesi ma non

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
(non è continua in $x=0$)

e $f'(x) = 1 \quad \forall x \in]0, 1[$!



$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

In questo caso $f(0) = f(2)$

f continua su $[0, 2]$

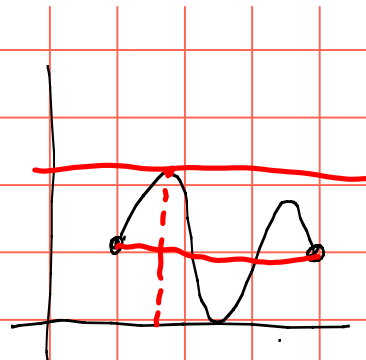
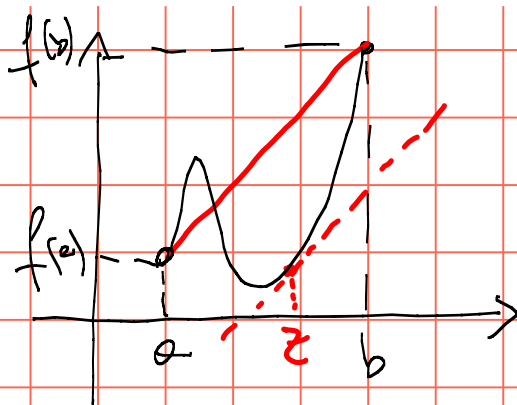
(ma f non è der. in $x=1$)
e $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]0, 2[\setminus \{1\}$

Teorema 13.4.8 Teorema di Lagrange Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa alle seguenti ipotesi:

(i) f continua per ogni $x \in [a, b]$;

(ii) f derivabile per ogni $x \in]a, b[$.

Allora esiste $z \in]a, b[$ tale che $f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



$\exists$ un punto $(z, f(z))$ sul grafico in cui la retta T_z è $\parallel$ alla retta che passa per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

$T(x)$ retta tangente per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

$$T(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$f(x) - r(x) = g(x)$$

• $g(x)$ è continua su $[a, b]$

• $g(x)$ " derivabile su $]a, b[$

• $g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0$

$$g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (b-a) = 0$$

$$\Rightarrow \exists z \in]a, b[\text{ t. c. } g'(z) = 0$$

$$\begin{aligned} g'(z) &= f'(z) - r'(z) \\ &= f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \end{aligned}$$

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Teorema 13.4.9 Teorema di Cauchy Siano date $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano alle seguenti ipotesi:

- (i) f, g continue per ogni $x \in [a, b]$;
- (ii) f, g derivabili per ogni $x \in]a, b[$.

Allora esiste $z \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

$$g'(z) (f(b) - f(a)) = f'(z) (g(b) - g(a))$$

$$f'(z) = g'(z) (f(b) - f(a)) - f'(z) (g(b) - g(a)) = 0$$

$$h(x) := g(x) (f(b) - f(a)) - f(x) (g(b) - g(a))$$

• $h(x)$ è continua in $[a, b]$

• $h(x)$ è derivabile in $]a, b[$

$$h(a) = h(b)$$

$$\Rightarrow \exists z : h'(z) = 0$$



Qm

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(z)}{f'(z)}$$

$$\left(\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right) \cdot \left(\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \right) = g'(z) \cdot \frac{1}{f'(z)}$$

Applicando Lagrange a f

$\exists z_2 : f'(z_2) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\parallel$

$\exists z_1 : g'(z_1) = -$

Cauchy dice $z_1 = z_2 = z$!

Teorema 13.4.10 *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, derivabile per ogni $x \in I$.*

$$(13.33) \quad \left(f'(x) = 0 \ \forall x \in I \right) \iff \left(f(x) = \text{Cost.} \ \forall x \in I \right).$$

⇐ benche (derivate di una cost = 0!)

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$f = \text{const}$ on I

$$\S \quad \forall x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{I} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

$$f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

• f derivable in $\mathbb{I}x_1, x_2\mathbb{I}$

- f continuous in $[x_1, x_2]$ (f deriv. $\Rightarrow f$ cont.)

$$\Rightarrow \exists z \in]x_1, x_2[: f'(z) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\cancel{x_2 - x_1} \neq 0} = 0 \quad \text{Z}$$

Teorema 13.4.12 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, derivabile per ogni $x \in I$.

(i) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è monotona strettamente crescente su I .

(ii) Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è monotona strettamente decrescente su I .

dim

$$f'(x) > 0 \quad \S \quad \forall x < y \quad x, y \in I \quad f(x) < f(y)$$

$$f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$$

• f continua su $[x, y]$

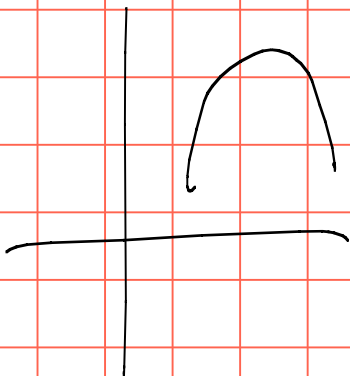
• " f derivabile su $]x, y[$

$$\Rightarrow \exists z \in]x, y[\quad f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\text{ma } y - x > 0$$

$$f'(z) > 0$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) > 0$$



$$f' > 0$$

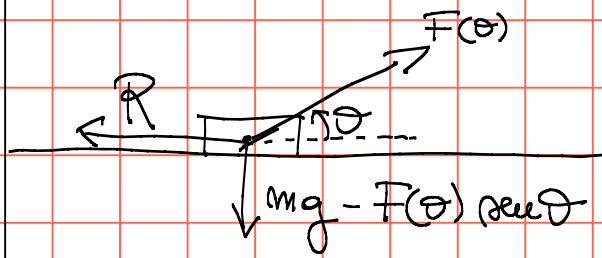
$$x < x_0$$

$$f' < 0$$

$$x > x_0$$

$$x_0 = \text{max loc}$$

Esercizio 13.7.1 Sia dato un corpo di massa m appoggiato su un piano scabro con coefficiente di attrito μ , a cui sia concesso di muoversi sul piano lungo una retta fissata r . Si supponga che al corpo sia applicata una forza $\vec{F}$ la cui direzione forma un angolo $\theta \in]0, \pi/2[$ con la retta r . Determinare l'angolo θ che rende minimo il modulo della la forza $\vec{F}$ necessaria a muovere il corpo.



$$R = \mu (mg - F(\theta) \sin \theta)$$

Le forze sono in equilibrio quando

$$F(\theta) \cos \theta = \mu mg - \mu F(\theta) \sin \theta$$

etc

Esercizio 13.7.2 *Provare che, tra tutti i rettangoli aventi area S fissata, quello di perimetro minimo è il quadrato di lato $\sqrt{S}$.*

Esercizio 13.7.3 *Provare che, tra tutti i rettangoli aventi perimetro $2p$ fissato, quello di area massima è il quadrato di lato $p/2$.*

