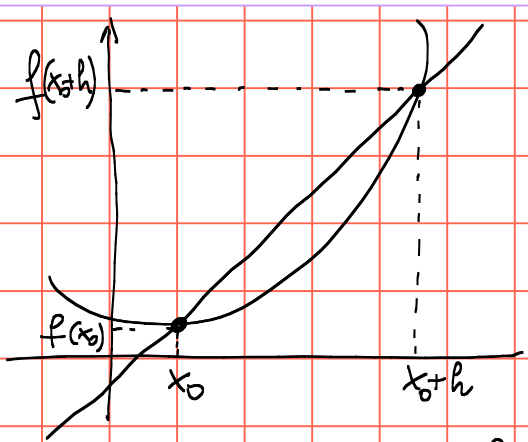
Lezione nro 24

Titolo nota 21/11/2011



Interpretando

$f(x)$: spazio percorso al tempo x

$$R_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{velocità media in } [x_0, x_0+h]$$

Ma è pur vero che $R_{x_0}(h)$ è il coeff. angolare della retta secante per $(x_0, f(x_0))$ $(x_0+h, f(x_0+h))$. Se ora si fa tendere $h \to 0$, $(x_0+h, f(x_0+h)) \to (x_0, f(x_0))$

e $R_{x_0}(h) \to f'(x_0) \equiv$ derivata prima di f in x_0

Con l'interpretazione fisica, $f'(x_0)$ corrisponde alla velocità nel punto x_0, ovvero la velocità istantanea.

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ polo per A

Si dice che f ha derivata prima in x_0

se $\exists \lim_{h \to 0} R_{x_0}(h) = f'(x_0)$
$$= Df(x_0)$$
$$= \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

$f(x) = e^x$ $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$f(x) = \log(1+x)$ $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$

Esempio Emontiamo funzioni non derivabili

$f(x) = |x|$ <u>non è</u> derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$
$\not=$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ polo per A

f si dice "differenziabile nel punto x_0"

se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$

t.c. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(|x - x_0|) \ (x \to x_0)$

Il numero $a = (df)(x_0)$ è detto "differenziale di f nel punto x_0"

La retta $r(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ è detta

"retta tg al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$"

Oss Sostanzialmente

differenziabile in x_0 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A

Sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) f derivabile nel punto x_0 con $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

2) f differenziabile nel punto x_0

dim

1) $\Rightarrow$ 2) $\quad \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $x_0 + h = x$ $\quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Quindi f differenziabile in x_0 con

$a = f'(x_0) = (df)(x_0)$

Viceversa

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x} + a = 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a = f'(x_0)$$

$\lightning$

<u>Oss</u> Si è visto che continua $\not\Rightarrow$ differenziabile

($f(x)=|x|$ è continua in $x_0=0$ ma non differenziabile)

Però differenziabilità $\Rightarrow$ continuità

<u>Teorema</u> $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

<u>dim</u>

$\exists a : f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + o(|x-x_0|)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + a \cdot \lim_{x \to x_0} (x-x_0) + \lim_{x \to x_0} o(|x-x_0|)$$

$$= f(x_0) + a \cdot 0 + 0$$

$$= f(x_0)$$

$\lightning$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

quando esiste, la "derivata sinistra $f'_-(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_{|]-\infty,x_0[}(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

quando esiste, la "derivata destra $f'_+(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_{|]x_0,+\infty[}(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$

Lemma $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

- Se $\exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ allora $\exists\, f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
- Se $\exists\, f'(x_0)$, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

Teorema $f, g: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

- $\exists\, f'(x_0)$
- $g \equiv f$ in un intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, g'(x_0) = f'(x_0)$

Esempio

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$

$$= \lim \frac{2x_0 h + h^2}{x} = 2x_0$$

quindi

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f'(x) = \cos x$$

infatti $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen} x_0}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cdot \cos h + \operatorname{sen} h \cos x_0 - \operatorname{sen} x_0}{h}$$

$$= \operatorname{sen} x_0 \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \cos x_0$$

$$f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

infatti $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} h - \cos x_0}{h}$$

$$= \cos x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= -\operatorname{sen} x_0$$

$$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

Teorema (algebra delle derivate)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ x_0 pdc per A

f, g derivabili in x_0 (ovvero $f'(x_0), g'(x_0) \in \mathbb{R}$)

1. $\exists (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2. $\exists (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

dim

(1) è banale (limite è somma = somma lim.)

(2) $$\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0+h)\,g(x_0) - f(x_0+h)\,g(x_0)}{h}$$

$$= \underbrace{f(x_0+h)}_{\downarrow h \to 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow h \to 0} + \underbrace{g(x_0)}_{\downarrow h \to 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow h \to 0}$$

$$f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Esempio $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

$f(x) = g(x)\,h(x)$ $g(x) = x^3$; $h(x) = x^2$

$f'(x) = g'h + gh' = (3x^2)\,x^2 + x^3(2x)$

$= 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a $f^{-1}(f(A) \cap B)$

$g : B \to \mathbb{R}$ $y_0 = f(x_0)$ p.d.a per B

f derivabile in x_0

g " " $f(x_0)$

allora $(g \circ f)(x)$ derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Oss $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ $\quad g'(y_0) = \frac{dg}{dy}(y_0)$

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{dg}{df}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

ovvero $h = (g \circ f)(x)$ $\quad \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{df}\frac{df}{dx}$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

essendo g continua in $f(x_0)$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = x^8 \qquad f'(x) = 8x^7$

$$f(x) = h(g(x)) \qquad h(y) = y^2 \qquad g(x) = x^4$$

$$\frac{dh}{dy} = 2y \qquad \frac{dg}{dx} = 4x^3$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 2(g(x)) \cdot 4x^3$$

$$= 2(x^4) \cdot 4x^3 = 8x^7$$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = [\cos(x^3)]^2$

$$f'(x) = -6\cos(x^3) \cdot \operatorname{sen}(x^3) \cdot x^2$$

$$f(x) = (l \circ h \circ g)(x) = l(h(g(x)))$$

$$l(z) = z^2 \qquad h(y) = \cos y \qquad g(x) = x^3$$

$$l'(z) = 2z \qquad h'(y) = -\operatorname{sen} y \qquad g'(x) = 3x^2$$

$$f' = l'(h(g(x))) \cdot h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(\cos(x^3)) \cdot (-\operatorname{sen}(x^3)) \cdot 3x^2$$

$= -6 \cos(x^3) \operatorname{sen}(x^3) \cdot x^2$ ▨

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a per $C = f^{-1}(f(A) \cap B)$

$g: B \to \mathbb{R}$ $y_0 = f(x_0)$ p.d.a. per B

$h: C \to \mathbb{R}$

$\cdot\ h(x) = (g \circ f)(x) \quad \forall x \in C$

Se f ed h derivabili nel punto x_0
$f'(x_0) \neq 0$ e $h'(x_0) \neq 0$

allora g derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$g'(f(x_0)) = \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)}$$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da cui la Tesi ✓

Oss In pratica, questo Teorema afferma

Se $h(x) = (g \circ f)(x)$ è derivabile in x_0

$f(x)$ " " " x_0

allora è derivabile pure g in $f(x_0)$

Teorema (derivata f.ne inversa)

$f: I \to \mathbb{R}$ strett. monot. su I intervallo

f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

allora $g(x) = f^{-1}(x)$ derivabile in $f(x_0)$ e

$$g'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$$

dim

$h(x) = x$ derivabile $h'(x_0) = 1$

$(g \circ f)(x) = x$

$f(x)$ " $f'(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$

g è derivabile $g'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$ ↯

Esempio

$$f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = 1/x$$

infatti

$$g(x) = e^x \qquad g'(x_0) = e^{x_0} \qquad f(x) = g^{-1}(x)$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

$$\Downarrow$$

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \qquad g'(f(x_0)) = e^{f(x_0)}$$

$$f'(x_0) = 1/e^{f(x_0)} = \frac{1}{e^{\log x_0}}$$

$$f'(x_0) = 1/x_0$$

Esempio

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dim

$$g(x) = x^2 \qquad g'(x_0) = 2x_0$$

$$g(f(x)) = x$$

$$\Downarrow$$

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \Rightarrow f'(x_0) = 1/g'(f(x_0)) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

infatti,

$g(x) = \operatorname{Tg} x \qquad g'(x_0) = 1 + \operatorname{Tg}^2(x_0)$

$g(f(x)) = x$

$g'(f(x_0))\, f'(x_0) = 1$

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{1+\operatorname{Tg}^2(f(x_0))} = \frac{1}{1+\operatorname{Tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Esempio Derivata di $1/f(x)$

$$\left(\log \frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{(1/f)'(x)}{1/f(x)}$$

$$\left(-\log f(x)\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Esempio Derivata di $\left(\frac{f}{g}\right)$

$$\left(\log\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)' = \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)}$$

$$\left(\log f(x) - \log g(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Importante

- Se $g'(x)$ è continua in x_0 allora $\exists\, g'(x_0)$
- Il viceversa non è vero

può esistere $g'(x_0)$ senza che g' sia continua in x_0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\exists\, f'(0)$ ma $f'(x)$ non è continua in $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} 1/h}{h} = 0$$

ma

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow}$$

infatti $\nexists \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} f'(1/y)$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{2}{y} \operatorname{sen} y - \cos y\right)$$

$$= 0 - \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \cos y}_{\text{questo non esiste}}$$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad z_n = 2n\pi \qquad \ldots$

Teorema 13.4.1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.*

(i) Se $f'(x_0) > 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{per ogni} \quad x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) < f(x) & \text{per ogni} \quad x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$

(ii) Se $f'(x_0) < 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{per ogni} \quad x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) > f(x) & \text{per ogni} \quad x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$

(i) Si sfrutta la def. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; 0 < |x - x_0| < \delta \quad f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon$

e per la permanenza segno

Teorema 13.4.2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.*

(i) Se f monotona crescente, allora $f'(x_0) \geq 0$

(ii) Se f monotona decrescente, allora $f'(x_0) \leq 0$

$f \nearrow$: $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$x - x_0 > 0 \Rightarrow$

Definizione 13.4.3 (`Minimo e massimo locale`) *Data* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$,

(i) un punto $x_0 \in I$ *si dice* `punto di minimo locale per` f *se esiste un intorno* $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ *tale che* x_0 *è punto di minimo per* $f_{U_{x_0}}$ *ovvero se*

$$\text{per ogni} \quad x \in U_{x_0}, f(x_0) \leq f(x).$$

(ii) un punto $x_0 \in I$ *si dice* `punto di massimo locale per` f *se esiste un intorno* $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ *tale che* x_0 *è punto di massimo per* $f_{U_{x_0}}$ *ovvero se*

$$\text{per ogni} \quad x \in U_{x_0}, \;\; f(x) \leq f(x_0).$$

Entrambe le definizioni diventano strette (ovvero il $>$ *prende il possto del* $\geq$*) quando* $[f(x) = f(x_0) \iff x_0]$.