

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_n n^2 \log \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

dim

$$a_n = n^2 \log \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

• Se $\alpha \leq 0$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ allora la serie diverge

• Se $\alpha > 0$ allora $a_n = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right)$

$$= \frac{1}{n^{\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right)$$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha-2}}} = 1$

allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-2}}$

hanno lo stesso carattere, ergo

$\alpha-2 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 3$ la serie $\sum_n a_n$ diverge

$\alpha-2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 3$ " " " converge

Riassumendo

$$\sum_n a_n \begin{cases} \text{diverge se } \alpha \leq 3 \\ \text{converge se } \alpha > 3 \end{cases}$$

Teorema (Criterio della radice n -esima)

Dato $\sum_n a_n$ serie a termini positivi

$$\left[\exists \rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \right]$$

① $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge

② $1 < \rho \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

dimi

Qm $\rho = 1$ allora non si può dire nulla

infatti $\sum_n n^2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ $\sum_n n^2$ diverge

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

Qm Questo Teorema, come si vede dalla dim,

consiste nel confrontare $\sum_n a_n$

con una opportuna serie geometrica

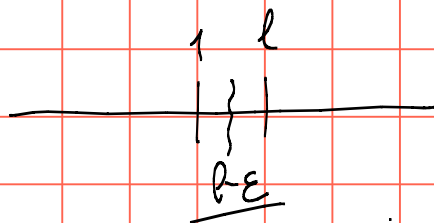
$$\sum_n q^n$$

dove q , "quomo modu" $q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$$\underline{\text{dimo}} \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

2) $l > 1$ $\sum_n a_n$ non converge ($l \in \mathbb{R}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$



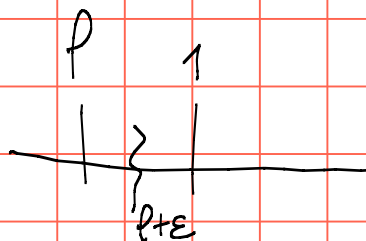
$$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 1 < l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$$

$$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 1^n = 1 < a_n$$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ ($a_n \not\rightarrow 0$)

allora $\sum_n a_n$ diverge

1) $0 \leq l < 1$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1-l}{2} \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1$$

allora

$$\forall n > \bar{n} \quad a_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$$\sum_n \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \text{ converge}$$

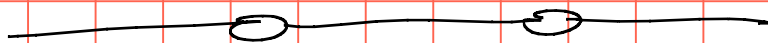
$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

2) Vediamo il caso $l = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists \bar{m} \text{ t.c. } \forall m > \bar{m} \quad M < \sqrt[m]{a_m}$$

$$M=2 \quad " \quad " \quad " \quad 2^m < a_m$$

quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_m a_m$ diverge $\checkmark$



Teorema (Criterio del Rapporto)

Dato una serie a termini ^{strettamente} positivi $\sum_m a_m$

$$\text{t.c. } \left[\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = l \right]$$

① $0 \leq l < 1$ allora $\sum_m a_m$ converge

② $1 < l$ allora $\sum_m a_m$ diverge

Qm $l=1$ è indecidibile !!!

Qm Il criterio delle radici n-esime è

costantemente il criterio del confronto

di $\sum_m a_m$ con una serie

geometrica opportuna.

Serie a termini di segno alternato

Teorema (Criterio di Leibniz)

Dato $\left[\sum_n (-1)^n \cdot a_n \right]$ tale che

① $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \quad (a_n = \downarrow)$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$

allora $\sum_n (-1)^n a_n$ converge

Ex $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge ma $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Ex
 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

olim

$$S_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cdot a_k = \sum_{k=0}^{2m-2} (-1)^k a_k + \overbrace{(-a_{2m-1} + a_{2m})}^{0 \text{ V/}}$$

$\parallel$

S_{2m-2}

$a_n = \downarrow$

dunque $S_{2m} = \downarrow$

ovvero $S_0 = a_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \dots \geq S_{2m}$

$$S_{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k a_k + \overbrace{(a_{2m} - a_{2m+1})}^{0}$$

V/

$$S_{2m-1}$$

$$(a_0 - a_1) = S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2m+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ovvero} \\ S_{2m+1} \nearrow \end{array} \right.$$

Confrontiamo ora S_{2m} con S_{2m+1}

$$S_{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k - a_{2m+1}$$

$$S_{2m+1} = S_{2m} - a_{2m+1}$$

$$S_{2m+1} \leq S_{2m}$$

• $S_{2m} \searrow \quad S_{2m} \leq S_0$

• $S_{2m+1} \nearrow \quad S_{2m+1} \geq S_1$

• $S_{2m+1} \leq S_{2m} \quad \forall m$

$$\boxed{S_1 \leq S_{2m+1} \leq S_{2m} \leq S_0}$$

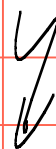
$S_{2n} \searrow$ è inf. limitata di $S_1 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = l_p$

$S_{2n+1} \nearrow$ è sup. limitata da $a_0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = l_d$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = l_d - l_p \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -a_{2n+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{l_p = l_d} = l$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{h_n} = S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \\ S_{k_n} = S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \\ h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

e quindi la serie converge



DM

Se $\sum_n a_n$ converge

$$\text{allora } \exists \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$$

$$\text{allora } \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n > \bar{n} \quad |S_n - S| < \varepsilon$$

dunque $\sum_n a_n$ convergente mi garantisce che

più cresce n , più $\sum_{k=0}^n a_k$ approssima "meglio" S

Ques Nella dimostrazione del criterio di

Leibniz si è visto che

$$\left. \begin{array}{l} S_{2m} \searrow S \\ S_{2m+1} \nearrow S \\ S_{2m+1} \leq S_{2m} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 \leq S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m} \leq S_0$$

Dunque

$$n \text{ pari} \quad |S_{2m} - S| \leq |S_{2m} - S_{2m+1}| = Q_{2m+1}$$

$$n \text{ dispari} \quad |S - S_{2m+1}| \leq |S_{2m+2} - S_{2m+1}| = Q_{2m+2}$$

$$\text{Quindi } \boxed{\forall m \quad |S - S_m| \leq Q_{m+1}}$$

Esempio: Calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ a meno di $\frac{1}{100}$

$$\text{Si vuole } |S - S_m| \leq \frac{1}{100}$$

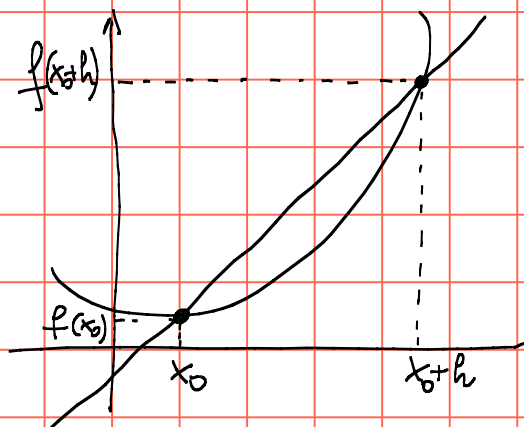
$$\text{ma si sa che } |S - S_m| \leq Q_{m+1}$$

$$\text{quindi se } Q_{m+1} \leq \frac{1}{100} \text{ sono a posto}$$

$$\text{ovvero se } \frac{1}{(m+1)^2} \leq \frac{1}{100} \text{ ovvero se } (m+1)^2 \geq 100$$

$$\text{ovvero se } m+1 \geq 10 \text{ ovvero se } m \geq 9$$

$$\text{Quindi } |S - S_9| \leq \frac{1}{100} \quad \checkmark$$



Interpretando

$f(x)$: spazio percorso
al tempo x

$$R_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{velocità media in } [x_0, x_0+h]$$

Ma è pur vero che $R_{x_0}(h)$ è il coeff.

angolare della retta secante per $(x_0, f(x_0))$

$(x_0+h, f(x_0+h))$. Se ora si fa tendere

$$h \rightarrow 0, \quad (x_0+h, f(x_0+h)) \rightarrow (x_0, f(x_0))$$

$$\text{e } R_{x_0}(h) \rightarrow f'(x_0) \equiv \text{derivata prima di } f \text{ in } x_0$$

Con l'interpretazione fisica, $f'(x_0)$ corrisponde

alla velocità nel punto x_0 , ovvero la velocità

istantanea.

Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ pda per A

Si dice che f ha derivata prima in x_0

$$\text{se } \exists \lim_{h \rightarrow 0} R_{x_0}(h) = f'(x_0) \\ = Df(x_0) \\ = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Esempio

$$f(x) = \sin x \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$f(x) = e^x \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$f(x) = \log(1+x) \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$$

Esempio Esistono funzioni non derivabili

$f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \times$$

Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ pda per A

f si dice "differenziabile nel punto x_0 "

$$\text{se } \exists a \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

$$\text{t.c. } f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + o(|x-x_0|) \quad (x \rightarrow x_0)$$

Il numero $\alpha = (df)(x_0)$ è detto "differenziale di f nel punto x_0 "

La retta $r(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ è detta

"retta tg al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ "

Qm Sostanzialmente

differentiabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

Teorema $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f derivabile nel punto x_0 con $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

2) f differenziabile nel punto x_0

$$1) \Rightarrow 2) \quad \overset{\text{dim}}{\exists} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0+h=x \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Quindi f differenziabile in x_0 con

$$\alpha = f'(x_0) = (df)(x_0)$$

Viceversa

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0 - x} + a = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a = f'(x_0)$$



Qm Si è visto che continuo $\nRightarrow$ differenziabile

($f(x) = |x|$ è continuo in $x_0 \Rightarrow$ ma non differenziabile)

Pero differenziabilità $\Rightarrow$ continuità

Teorema $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

dim

$$\exists a : f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} o(|x - x_0|)$$

$$= f(x_0) + a \cdot 0 + 0$$

$$= f(x_0)$$



