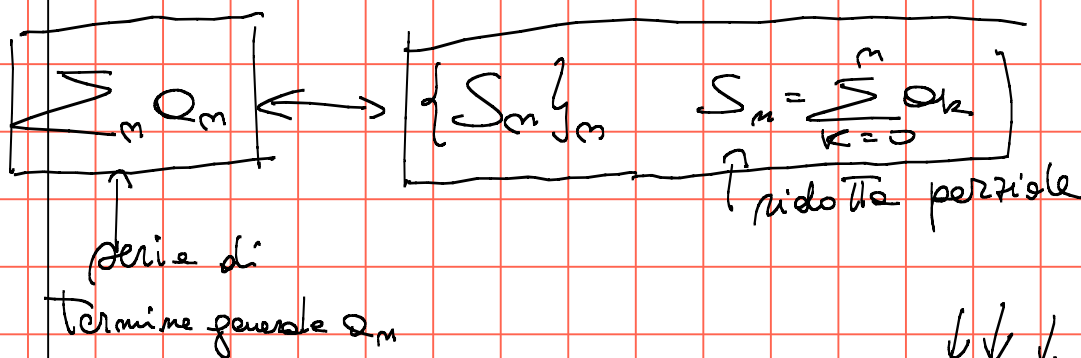




Serie convergente se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$

" divergente se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$

" indeterminata se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$\sum_m Q_m \equiv$ serie numerica Termine
 generale Q_m
 $\equiv$ successione

$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k =$ somma (che può non
 esistere) della serie

$\sum_n Q_n$

$\equiv$ Numero $\in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

Esempio $\sum_n q^n$ $q \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{non converge} & q \leq -1 \end{cases}$$

Questa serie $\sum_n q^n$

è detta "Serie geometrica"

di ragione $q \in \mathbb{R}$

Esempio $2, \overline{16}$

$$2, \overline{16} = 2 + \frac{16}{100} + \frac{16}{10^4} + \frac{16}{10^6} + \dots$$

$$= 2 + \frac{16}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^{2M}} \right)$$

$$= 2 + \frac{16}{10^2} \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^M \left(\frac{1}{10^2} \right)^k \right)$$

$$= 2 + \frac{16}{10^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^k \quad \left| < \frac{1}{10^2} < 1 \right.$$

$$= 2 + \frac{16}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}$$

$$= 2 + \frac{16}{100} \cdot \frac{100}{99} = 2 + \frac{16}{99}$$

Esempio $2, \overline{13} = \frac{211}{99}$

$$2 + \frac{13}{100} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right) = 2 + \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99}$$

Esercizio

$$2, \overline{312} =$$

$$2, \overline{123} =$$

Qm $1, \overline{9999} \dots = 1, \overline{9} < 2$? No

risposta =

$$1, \overline{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots$$

$$= 1 + \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 2 !!!$$

○ Tra alle serie geometriche, mi
deve conoscere la Serie Armonica

Generalmente

$$\text{Esempio } \left[\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \right] \begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Esempi

$$\textcircled{1} \sum_n \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{serie di Telegli})$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \forall k \geq 1 !$$

Una cosa che hanno in comune le
serie convergenti è la seguente

$$Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

② la serie $\sum_n Q_n$ con $Q_n = 1$

è una serie divergente a $+\infty$

$$\text{infatti, } S_m = \sum_{k=0}^m Q_k = \sum_{k=0}^m 1 = m+1$$

$$\text{e dunque } \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k = +\infty$$

Teorema (Conditione Necessaria di convergenza)

Se $\sum_n Q_n$ è convergente ($\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k \in \mathbb{R}$)

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 0$$

dim

$$S_m = \sum_{k=0}^m Q_k \quad \text{per ipotesi converge a } S$$

dunque

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (S_m - S_{m-1}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m - \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{m-1}$$

$$\parallel$$
$$\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m$$

$$\parallel$$
$$S - S$$
$$0$$

$$\text{dunque } \lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = 0$$

2° dim. $\{S_m\}$ è convergente e dunque è di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \forall k \geq 0 \quad |S_{m+k} - S_m| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \quad k=1 \quad |S_{m+1} - S_m| = |a_{m+1}| < \varepsilon$$

$$\text{ovvero } \lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = 0$$



Attenzione: NON È UNA CONDIZIONE
SUFFICIENTE

Esempio $\sum_n \frac{1}{n}$ serie armonica

- è divergente

- $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0$ (termine generale
infinitesimo)

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{m} > \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} = S_{m-1}$$

ovvero si prova che $S_m \nearrow$

e dunque $\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \sup_m S_m$

Ma ora proviamo che $\{S_m\}$ non è
di Cauchy, e quindi $S_m \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{m+m} + \frac{1}{m+(m-1)} + \dots + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m}$$

e dunque (miglioriamo l'errore di Cauchy)

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \bar{m} \exists m_1 > \bar{m} - 1 \exists k = m_1 \forall c.$$

$$|S_{m_1+m_1} - S_{m_1-1}| = \left| \frac{1}{2m_1} + \dots + \frac{1}{m_1} \right| \geq \frac{m_1}{2m_1} = \frac{1}{2}$$

Dimostriamo inoltre che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$



Teorema (Criterio di Convergenza di Cauchy)

Dato la serie $\sum_n a_n$, sono tra loro equivalenti:

① $\sum_n a_n$ è convergente

② $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \forall k \geq 0 \quad |a_{m+k} - a_{m+k-1} + \dots + a_m| < \varepsilon$

dim.

$\sum_n a_n$ convergente

ne

{ S_m } di Cauchy $\sum_{k=0}^m a_k = S_m$

ne

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} > 0 \forall m, m > \bar{m} \quad \left| \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \right| < \varepsilon$

ne

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m, m > \bar{m} \quad |a_m + a_{m-1} + \dots + a_{m+1}| < \varepsilon$

ne

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \forall k \geq 0 \quad |a_{m+k} + \dots + a_m| < \varepsilon \quad \checkmark$

Def Data la serie $\sum_n a_n$, questa si
dice "assolutamente convergente"

se $\sum_n |a_n|$ converge

Ex (Convergenza $\not\Rightarrow$ Convergenza assoluta)

Infatti la serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$

- converge (Criterio di Leibniz)
più avanti;

- non converge assolutamente

$$\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n}$$

in quanto $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Ex l'esempio precedente dice che

$$\sum_n a_n \text{ convergente} \not\Rightarrow \sum_n |a_n| \text{ convergente}$$

Teorema (Convergenza assoluta $\Rightarrow$ Convergenza)

Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente

allora $\sum_n a_n$ converge

dim

Ricordiamo che

$$(*) |a_{n+k} + \dots + a_n| \leq |a_{n+k}| + \dots + |a_n|$$

$$\text{Hip } \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall m > \bar{n} \forall k > 0 \quad |a_{m+k} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

ma per la (*) segue

$$\exists \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall m > \bar{n} \forall k > 0 \quad |a_{m+k} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

↙

Ricordando

$$\{\text{Serie Assolut. Convergent}\} \subsetneq \{\text{Serie Convergent}\}$$

$$A \not\subseteq B \text{ se } [A \subseteq B \wedge \exists b \in B \ b \notin A]$$

Serie a termini positivi

Def Una serie $\sum_n a_n$ si dice

"a termini positivi" se $\boxed{a_n \geq 0 \ \forall n}$

Om per le serie a termini positivi

Convergenza Assoluta $(\equiv)$ Convergenza

Qes Tutto quello che vale per

$$\sum_n a_n \text{ con } a_n \geq 0$$

vale per

$$\sum_n a_n \text{ con } a_n \leq 0$$

Qm In luogo di $S_m = \sum_{k=0}^m a_k$

ni possiamo considerare

$$\bar{S}_m = \sum_{k=10^{40}}^m a_k$$

$\{S_m\}$ converge se $\{\bar{S}_m\}$ converge

ovvero i primi 10^9 termini non influiscono sull'andamento della serie!

Teorema

$\sum_n a_n$ a Termini positivi

allora $\sum_n a_n$ è convergente

$\sum_n a_n$ è divergente a $+\infty$

dim

$$S_{m+1} = \sum_{k=0}^m a_k + a_{m+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^m a_k = S_m$$

ovvero $S_m \nearrow$ e dunque

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = S \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases} \quad \Leftarrow$$

Qm Non sono mai determinate

Teorema (Criterio del confronto)

Date le successioni non negative $\{a_m\}_m$ e $\{b_m\}$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_m b_m \text{ converge} \\ a_m \leq b_m \quad \forall m \geq m_0 \end{array} \right\} \text{ allora } \sum_m a_m \text{ converge}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum_m a_m \text{ diverge a } +\infty \\ a_m \leq b_m \quad \forall m \geq m_0 \end{array} \right\} \text{ allora } \sum_m b_m \text{ diverge a } +\infty$$

dim

$$A_m = \sum_{k=0}^m a_k \quad B_m = \sum_{k=0}^m b_k$$

$$A_m = \sum_{k=0}^m a_k = \sum_{k=0}^{m_0} a_k + \sum_{k=m_0+1}^m a_k$$

$\parallel$

$$A_{m_0} + \sum_{k=m_0+1}^m b_k$$

$\parallel$

$$A_{m_0} - \sum_{k=0}^{m_0} b_k + \sum_{k=0}^{m_0} b_k + \sum_{k=m_0+1}^m b_k$$

$\parallel$

$$A_{m_0} - B_{m_0} + B_m$$

cioè

$$(*) \quad A_m \leq [A_{m_0} - B_{m_0}] + B_m \quad \forall m \geq m_0$$

① $\sum_n b_n$ converge

$$0_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$\Downarrow$

$\{B_n\}_n$ converge

$$0_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

per le (*)

$$\Rightarrow \{A_n\}_n \text{ converge}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_n 0_n \text{ converge}$$

② $\sum_n 0_n$ diverge

$$0_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$\Downarrow$

$\{A_n\}_n$ diverge

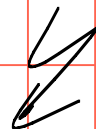
per le (*)

$$\Rightarrow \{B_n\}_n \text{ diverge}$$

$$0_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$\Downarrow$

$$\sum_n b_n \text{ diverge}$$



Esempio $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\alpha \leq 1$

infatti $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall \alpha > 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge} \quad \forall \alpha \geq 0$$

Corollario (del Teorema del confronto)

Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni
non negative e infinitesime

Se $\sum_n b_n$ converge
 $a_n = o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty$ } allora $\sum_n a_n$ converge

dim

$$a_n = o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \exists n_1 > 0 \quad \forall n > n_1 \quad a_n < b_n$$

$$\begin{array}{l} a_n < b_n \quad \forall n > n_1 \\ \sum_n b_n \text{ convergente} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{per confronto} \\ \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge} \end{array}$$

Teorema (Confronto asintotico)

Sia $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non negative e infinitesime

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$$

Allora sono equivalenti

(i) $\sum_n a_n$ converge (diverge)

(ii) $\sum_n b_n$ " (")

Dim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad \frac{l}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2} l \cdot b_n$$

$$\boxed{\forall n \geq n_1 \quad \left(\frac{l}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}l\right) b_n}$$

Ne segue che

$\sum_n a_n$ converge (diverge) se $\sum_n b_n$ converge (diverge)



Esercizio $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ converge (serie Mengoli)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = 1$$

$\Rightarrow$ (Criterio Comparato Asintotico) $\sum_n 1/n^2$ converge

Esercizio $\sum_n 1/n^\alpha$ converge $\alpha > 2$

dim

Sappiamo che
 $\sum_n 1/n^2$ converge

$$\text{ma } n^2 < n^\alpha \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha > 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \Rightarrow \quad \text{(Criterio Comparato)}$$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \forall \alpha > 2 \quad \checkmark$$

On Resta da vedere che succede a $\sum_n 1/n^\alpha$

nei casi $0 < \alpha \leq 1$: Vedremo che converge

per il Criterio dell'Integrale Dunque

$$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

- Serie Armonica Generalizzata

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_n n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0 \Rightarrow \left[\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right]^{n^2} \not\rightarrow 0$$

quindi la serie non converge (diverge a +∞)

$$2) \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \left(y = \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{y})}{\frac{1}{y}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 \quad \forall \alpha > 0 \right|$$

$$Q_n = n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim n^2 \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}} = b_n$$

$$\sum_n Q_n \text{ si comporta come } \sum_n b_n \quad (\alpha > 0)$$

$$\sum_n Q_n \text{ converge se } \sum_n \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ converge}$$

$$\sum_n Q_n \quad \text{..} \quad \underline{\text{ne}} \quad \alpha - 2 > 1$$
$$\underline{\text{ne}} \quad \alpha > 3$$

$$\sum_n p_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{divergente } \infty & \alpha \leq 3 \\ \text{convergente} & \alpha > 3 \end{array} \right.$$

dim

Osserviamo che, se $\alpha \leq 0$, allora

$$\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow_0 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \not\rightarrow_0$$

$$\Rightarrow n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \not\rightarrow 0$$

e dunque la serie non converge

(non vale la Cond. Necessaria)

$\alpha > 0$ in questo caso $\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \rightarrow 0$

in particolare

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

e dunque

$$\frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}} \sim n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

dunque

$$\sum_n \frac{n^2}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-2} \text{ converge}$$

$$\text{per } \alpha - 2 > 1$$

se $\alpha > 3$

Dunque

$\alpha \leq 0$ la serie diverge perché
viola la condizione necessaria

$0 < \alpha \leq 3$ la serie diverge per il criterio
confronto con $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$

$3 < \alpha$ la serie converge per il criterio
confronto con $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ 