

Def $\{a_n\}_n$ è una succ. di Cauchy se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) > 0 : \forall m, n > \bar{n}(\varepsilon) |a_m - a_n| < \varepsilon$

Dom "Sembra" la def. di limite, ma
non compere il limite!

Teorema $\{ \text{succ. convergenti in } \mathbb{R} \} \subseteq \{ \text{succ. Cauchy} \}$

Se $\{a_n\}_n$ è convergente, ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$
allora $\{a_n\}_n$ è una succ. di Cauchy

Dom Vale il viceversa, ovvero

$\{ \text{succ. di Cauchy} \} \subseteq \{ \text{succ. convergenti} \}$

Lemma 1

Se $\{a_n\}_n$ è una succ. di Cauchy

allora $\{a_n\}_n$ è limitata

dim

$$\text{Hip } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} : \forall m, m > \bar{m} \quad |Q_m - Q_{m-1}| < \varepsilon$$



$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{m}(1) : \forall m, m > \bar{m} \quad Q_m - 1 < Q_m < Q_m + 1$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{m} : \forall m > \bar{m} \quad m = \bar{m} + 3 \quad Q_{\bar{m}+3} - 1 < Q_m < Q_{\bar{m}+3} + 1$$

$$\exists \bar{m} : \forall m > \bar{m} \quad |Q_m| < |Q_{\bar{m}+3}| + 1$$

$$K = \max\{|Q_0|, \dots, |Q_{\bar{m}}|\}$$

$$\forall m \quad |Q_m| < \max\{K, |Q_{\bar{m}+3}| + 1\}$$



Lemma 2

$\{Q_n\}$ succ. di Cauchy

$\exists \{Q_{k_m}\}_m$ una sotto successione $\boxed{Q_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L \in \mathbb{R}}$

allora $\boxed{Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L}$

dim.

$$\text{Hip } \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \forall m, n > n_1, & |Q_m - Q_n| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \forall m > n_2, & |Q_{k_m} - L| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |Q_n - L| &= |Q_n - Q_{k_m} + Q_{k_m} - L| \\ &\leq \underbrace{|Q_n - Q_{k_m}|} + \underbrace{|Q_{k_m} - L|} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_3 = \max\{n_1, n_2\} \forall m, n > n_3 \begin{cases} |Q_m - Q_n| < \varepsilon \\ |Q_{k_m} - L| < \varepsilon \end{cases}$$

$$(n > n_3 \Rightarrow k_n > n_3)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_3 \forall n > n_3 \quad |Q_n - L| \leq \underbrace{|Q_n - Q_{k_n}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|Q_{k_n} - L|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

✓

Teorema

$\{Q_n\}_n$ succ. di Cauchy

allora $\{Q_n\}$ è convergente

dim

1) $\{Q_n\}_n$ è di Cauchy allora $\{Q_n\}$ è limitabile
(per il Lemma 1)

2) Se $\{Q_n\}$ è limitabile

allora $\exists Q_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ (per B.W.)

3) $\{Q_n\}_n$ succ. di Cauchy

$$Q_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

(per Lemma 2)

$$\Rightarrow Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$



Om In $\mathbb{Q}$ il Teorema di Cauchy non vale

Infatti, Esistono successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$

$$\{Q_n\} \in \mathbb{Q} \quad Q_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

per esempio $\exists \{q_n\} \subseteq \mathbb{Q} \quad q_n \rightarrow 2$

e dunque essendo

convergente, è

di Cauchy

Dimostriamo $\mathbb{R}$

$$A = \{ \{q_n\} : \{q_n\} \subseteq \mathbb{Q}, \{q_n\} \text{ di Cauchy} \}$$

qui ci servono successioni convergenti

→ a numeri razionali

→ " " irrazionali

$$\mathbb{Q} \subseteq A$$

$$\uparrow$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\uparrow$$

$$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \dots\}$$

$$\{q_n\}, \{b_n\} \in A$$

$$q_n \sim b_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - b_n) = 0$$

$$A / \sim = \{ [q_n] \} \equiv \mathbb{R}$$

Esempio Studiare la continuità di

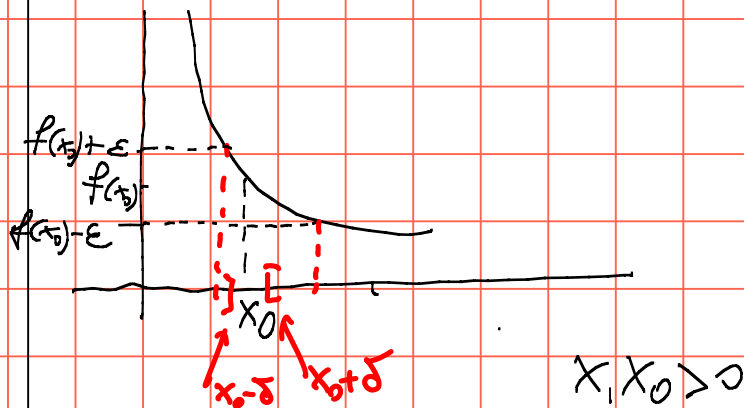
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

dim.

$\forall x_0 > 0$, f continua in x_0

Fisso x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$



$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{xx_0} < \frac{\delta}{xx_0} < \varepsilon$$

Voglio $\frac{\delta}{xx_0} < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Voglio $\sup_{x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[} \frac{\delta}{xx_0} = \varepsilon$

$$\frac{\delta}{(x_0 - \delta) \cdot x_0} = \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon x_0^2 - \varepsilon \delta x_0$$

$$\delta(1 + \varepsilon x_0) = \varepsilon x_0^2$$

$$\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall x > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{|x - x_0|}{x x_0} < \varepsilon$$

$$\frac{|x - x_0|}{x x_0} < \frac{\delta}{(x_0 - \delta) x_0} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} \cdot \frac{1}{x_0^2 - \frac{\varepsilon x_0^3}{1 + \varepsilon x_0}}$$

$$= \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} \cdot \frac{1}{\frac{x_0^2 + \varepsilon x_0^3 - \varepsilon x_0^3}{1 + \varepsilon x_0}}$$

$$= \frac{\varepsilon x_0^2}{x_0^2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

Qm $\delta = \delta(\varepsilon, \downarrow x_0) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$

ε fijo

$$\delta \xrightarrow{x_0 \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\delta \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} 0$$

Funzioni uniformemente continue

Esercizio $f(x) = \frac{1}{x}$ continua $\forall x_0 > 0$

$$(x_0 > 0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} < \frac{\delta}{|x_0| \cdot |x_0 - \delta|} < \varepsilon$$

$\xrightarrow{\text{volgio}}$

perché $x_0 - \delta > 0$

$$\text{dunque preso } \frac{\delta}{x_0^2 - \delta x_0} = \varepsilon \Leftrightarrow \delta = \delta(x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} \quad \forall x > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

Osserviamo che, a parità di ε ,

$$\delta(x_0) \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} 0 \quad (\text{il grafico di } f \text{ ha un'asintota verticale})$$

$$\text{come pure } \delta(x_0) \xrightarrow{x_0 \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{il grafico di } f \text{ ha un'asintota orizzontale})$$

ovvero $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) !!$

Def $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, si dice

" L -Lipschitziana" se $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
 $\forall x, y \in I$

Esempi $f(x) = 3x + 2$ è Lipschitziana

$$L = 3 \quad \text{su } I = \mathbb{R}$$

$$|3x + 2 - 3y - 2| = 3|x - y|$$

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ L -Lipschitz

allora f continua $\forall x \in I$

dem

fissato x_0 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ $\forall x \in I$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L \cdot \delta = \varepsilon$$

$\uparrow$
Lipschitz.

$\checkmark$

Dom Quindi le f. Lipschitziane sono

continue e $\delta = \delta(\varepsilon)$ ovvero δ non

dipende dall' x_0 in cui si testa la

continuità.

Esempio (di funzione continua ma non Lipschitz)

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \text{ su } [0, +\infty[}$$

$$\S \sup_{x, y > 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = +\infty$$

per $x_n > 0$, $y_n = \frac{x_n}{2}$ dove $\{x_n\}_n : x_n \rightarrow 0$

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = \frac{\left| \frac{1}{x_n} - \frac{2}{x_n} \right|}{\left| \frac{x_n}{2} \right|} =$$

$$= \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2}{x_n} = \frac{2}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{ovvero } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = +\infty$$

$$\text{e dunque } \sup_{x, y > 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = +\infty$$

Ne segue che f non può essere

Lipschitziana, in quanto $\nexists L \in \mathbb{R}, +\infty[$

$$\text{t.c. } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y > 0$$

Def $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice "uniformemente continua" (su I) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta = \delta(\varepsilon)} \quad \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Teorema f è u.c. su I

allora f continua $\forall x_0 \in I$

dim

$$\exists \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{M.p.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

↑ prendiamo $y = x_0$

e il gioco è fatto ↙

Teorema f è L-derivabile su I

allora f è u.c. su I

dim

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad |x - y|$$

$$\S \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) \quad \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{L}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{L} \quad \forall x, y \in I \quad (|x - y| < \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L |x - y| < L \cdot \delta = \epsilon$$

$\uparrow$
 $L = \text{Lipschitz}$

Om Per le funzioni Lipschitziane, la costante L non dipende dalla coppia x, y scelta! Ovvero $L = L(I)$

(L può variare al variare dell'intervallo I)

Om Nelle funzioni u.c. si aveva che

$\delta = \delta(\epsilon)$ ma non dipende

dalla scelta fatta per x, y

Come prima, $\delta = \delta(\epsilon, I)$ ovvero può variare con I

Qm Nelle funzioni u.c. $\delta = \delta(\varepsilon)$

ovvero δ dipende dall'insieme A ma
non varia al variare di x_0 !!

Teorema $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

f u.c. su $A \implies f$ continua $\forall x \in A$

dim (banale)

Qm In generale il viceversa non è vero

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{è continua su }]0,1[\text{ (già visto)} \\ \text{non è u.c. su }]0,1[\end{array} \right.$

$$x, y = \frac{x}{2} \in]0,1[\quad |x - y| = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \left| f(x) - f(y) \right| = \frac{1}{x}$$

$$\forall \varepsilon = 1 \quad \forall \delta \quad \exists x_\delta, y_\delta : |x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| \geq 1$$

$$" \quad " \quad \exists x_\delta < \min\{2\delta, 1\} \quad y_\delta = \frac{x_\delta}{2} \in]0,1[$$

$$|x_\delta - y_\delta| = \frac{x_\delta}{2} < \delta \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| = \frac{1}{x_\delta} \geq 1 \quad \checkmark$$

Esempio $f(x) = x^2$ non è u.c.

$$\text{su } I = [0, +\infty[$$

dim

$$\exists \varepsilon = \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \left(|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_0 \right)$$

Dovrò ritracciare la coppia $x_\delta, y_\delta \gg 1$

ovvero ho problemi quando vado verso $+\infty$

Fissato x_δ mi prende $y_\delta = x_\delta + \delta/2$

In tal modo $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ è inoltre

$$\begin{aligned} |f(x_\delta) - f(y_\delta)| &= \left| x_\delta^2 - \left(x_\delta^2 + \delta x_\delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \right| \\ &= \left| -\delta x_\delta - \frac{\delta^2}{4} \right| = \delta x_\delta + \frac{\delta^2}{4} > \delta x_\delta \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta = \frac{1}{\delta}, y_\delta = x_\delta + \frac{\delta}{2}$ t.c.

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \delta x_\delta = 1$$

ovvero $f = x^2$ non è u.c.

tutto comincia se $I = [a, b]$ chiuso e limitato

Teorema (Heine-Weierstrass)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a, b]$

allora f è u.c.

dim

contrario f non è u.c.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in I \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

pongo $\delta = 1/n$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n > 0 \exists x_n, y_n \in I \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

ma $I = [a, b]$ e dunque

$$a \leq x_n \leq b \xRightarrow{\text{B.W.}} \exists x_{k_n} \rightarrow \bar{x} \in [a, b]$$

No

$$0 \leq |y_{k_n} - \bar{x}| = |y_{k_n} - x_{k_n} + x_{k_n} - \bar{x}|$$

$$\leq |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \bar{x}|$$

$$= \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - \bar{x}|$$

$$\text{dunque, essendo } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - \bar{x}| \right) = 0$$

$$\text{si ha pure } y_{k_n} \rightarrow \bar{x}$$

Per la continuità di f

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

e dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$

cioè

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon_0$$

ma questo è in aperto contrasto con

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \quad \exists x_n, y_n \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \\ \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

Dunque si ha un assurdo, da cui

segue che f è u.c. $\Downarrow$

Esempio $f(x) = x^2$ è u.c. su $I = [0, 10^{100}]$

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ è u.c. su $I = [\frac{1}{100}, 1]$

Teorema

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ u.c.

allora $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

dim

Problema $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, e supponiamo $a \in \mathbb{R}$

Sia $\{x_n\} \in]a, b[$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

La successione $\{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy

in quanto f unif. continua
 $\Downarrow$

$$(a). \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, y, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n$ è di Cauchy
 $\Downarrow$

$$(b) \forall \delta > 0 \exists \bar{n} \forall n, m > \bar{n} \quad |x_n - x_m| < \delta$$

$$(a) + (b) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists \bar{n} \forall n, m > \bar{n} \quad |x_n - x_m| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m > \bar{n} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

cioè $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy

ovvero $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n, \forall m > n, |f(x_m) - l| < \varepsilon$$

Però $y_n \rightarrow a$, $y_n \neq x_n$, si ha $x_n - y_n \rightarrow 0$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_2 \quad \forall m > m_2 \quad |x_m - y_m| < \varepsilon$$

$$\text{ma } |f(y_m) - l| \leq |f(y_m) - f(x_m)| + |f(x_m) - l|$$

$$\text{e } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} = \max\{m_1, m_2\} \quad \forall m > \bar{m}$$

$$|f(y_m) - l| < 2\varepsilon$$

$$\text{ovvero } f(y_m) \rightarrow l$$

Ma allora si è provato che

$$\forall \{x_n\} \subset]a, b[, \quad x_n \rightarrow a \quad f(x_n) \rightarrow l$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

$$\text{analogamente } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$



Corollario

$$\tilde{f} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f & x = b \end{cases}$$

Se f è u.c. su $]a, b[$, con $a, b \in \mathbb{R}$

allora $\tilde{f}$ è u.c. su $[a, b]$

dim
in fatti

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f$$

definite

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f & x = b \end{cases}$$

questa funzione $\tilde{f}$ risulta

continua su $[a, b]$, e dunque per

il Teorema di Heine-Weierstrass

$\tilde{f}$ è u.c. su $[a, b]$



Serie numeriche

Bisogna dare un senso a

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$1+2+3+4$$

$$(1+2) + (3+4)$$

$$1 + (2+3) + 4$$

$$(1+4) + (2+3)$$

$$(4!)$$

Example

$$Q_n = (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots + (-1)^n \dots$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 \dots$$

$$= 0$$

$$= 1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + [(-1)]$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Def $\{Q_n\}$ successione Q_n , si definisce

$$S_n = \sum_{k=0}^n Q_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

"ridotta (somma) parziale n-esima"

Examp's $(-1)^n = Q_n$

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 - 1 = 0$$

$$S_2 = S_1 + 1 = 1$$

$$S_3 = S_2 - 1 = 0$$

...

$$(((1-1)+1)-1)+1-1$$

$$\underbrace{1-1+1-1+1-1}$$

Def Diciamo "serie di termini generici Q_n "

la successione

$$\{S_n\}_n = \left\{ \sum_{k=0}^n Q_k \right\}_n$$

e la indichiamo con $\sum_n Q_n$

$$\underline{Q_n} \quad \sum_n Q_n \longleftrightarrow \{S_n\}_n = \left\{ \sum_{k=0}^n Q_k \right\}$$

Serie convergente se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

" divergente se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty (-\infty)$

" indeterminata se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Ques Le serie sono delle particolari
successioni

Example Serie Geometrica

$$\sum_n q^n \quad q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_n q_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{indeterminata, } q \leq -1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 \\ \text{diverge a } +\infty, \quad q \geq 1 \end{array} \right.$$

Ricordiamo che, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

la seguente identità

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

Ricordiamo inoltre che, se $q \neq 0$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |q|^{y+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{(y+1) \log |q|}$$
$$z = (y+1) \log |q|$$

$$= \begin{cases} \lim_{z \rightarrow +\infty} e^z = +\infty & \text{se } |q| > 1 \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0 & \text{se } |q| < 1 \end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = +\infty \quad \text{quando } q > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0 \quad \text{quando } 0 < q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0 \quad \text{quando } -1 < q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \nexists$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^{n+1} \nexists$$

da cui segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1}}{1 - q} = +\infty \quad q > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \quad q = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{?} \quad q \leq -1$$

Esempio $2.\overline{3} = \frac{7}{3}$

lupetti

$$2.\overline{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

$$= 2 + \frac{3}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right)$$

$$= 2 + \frac{3}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

$$= 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{3} \quad \checkmark$$

