

Lezione n° 20 - 14 novembre 2011

Titolo nota

14/11/2011

$$e_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad m=1, 2, \dots$$

Proviamo e_m ↗

$$2 \leq e_m < 3 \quad \forall m \geq 1$$

$$\Downarrow \\ \exists \lim_{m \rightarrow \infty} e_m = e$$

In effetti vale il Teorema

$\{e_m\}_m$ successione crescente

$$\text{allora } \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} e_m = 1$$

$$\text{dove } 1 = \sup_m e_m //$$

In seguito ci pone

$$e^x = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \quad x \geq 0$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} e_m(x)$$

e si ha $e_m(x)$ ↗ e limitata $\forall x \geq 0$
etc

Teorema

Sia $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \geq 1$

1. $e_{n-1} \leq e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. $2 \leq e_n < 3 \quad \forall n \geq 1$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = e = 2,718... \quad (\text{così } 1+2)$

dim

1) $e_n \nearrow$

$$e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = e_2 \quad \checkmark$$

Hip induttiva $e_{n-2} < e_{n-1}$

$$\S \quad e_{n-1} < e_n$$

Questa equivale a $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$1 - \frac{1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

ma quest'ultima disug è vera poiché

la dis. Bernoulli dice che $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \quad \checkmark$

Quindi $e_n \nearrow$ ed inoltre $e_n \geq e_1 = 2 \quad \forall n \geq 1$

2) Si vuole provare che e_n limitata

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_n \quad \forall n$$

Si prova che $b_n \downarrow$

$$b_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4 = (1+1)^2 = b_1 \quad \checkmark$$

Thp induttiva $b_{n-1} < b_{n-2}$

$$\S \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$\frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

$$\text{Ma per Bernoulli} \quad \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

da cui segue la Terza

- $b_n \downarrow$

- $b_n \geq e_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow b_n \geq e_1 = 2 \quad \forall n \geq 1$

Ne segue che $b_n \rightarrow L \in]2, 4[$

Quindi

$$\left. \begin{array}{l} e_n \nearrow \\ e_n \leq b_n \quad \forall n \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$2 < e < 4$$

Si può essere più precisi in quanto

$$\text{essendo } b_n \downarrow \Rightarrow b_n \leq b_4 \quad \forall n \geq 4$$

$$\Rightarrow e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n < b_4 = \frac{625}{256} < 3 \quad \Downarrow$$

Adesso si può definire la funzione

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x)$$

$$\textcircled{1} \quad e^0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad e^{-x} = 1/e^x \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{ovvero la funzione è definita } \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Sic } x > 0 \quad e_n(x) \cdot e_n(-x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

dunque, preso $n > n_0 = \lceil x \rceil$

si ha che

$$\begin{array}{ccc} \text{Bernoulli} & & \\ \downarrow & & \\ 1 - \frac{x^2}{n} & \leq & \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = e_n(x) e_n(-x) \leq \underbrace{1}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ 1}} \end{array}$$

quindi passando al limite

$$e^x \cdot e^{-x} = 1$$

$$(3) e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si prova per $xy > 0$ e poi usando (2) si estende

$$e_m(x) \cdot e_m(y) = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{x+y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m$$

e prendendo $m > \max\{|xy|, x+y\}$

$$e_m(x+y) = \left(1 + \frac{x+y}{m}\right)^m \leq e_m(x) e_m(y) \leq \left(1 + \frac{x+y}{m}\right)^m \left(1 + \frac{xy}{m^2}\right)^m$$

$$\downarrow m \rightarrow \infty$$

$$e^{x+y}$$

$$\underbrace{e_m(x+y) \cdot b_m}_{\downarrow m \rightarrow \infty} = \frac{e^{x+y}}{1}$$

e quindi segue la Terza $e^{x+y} = e^x e^y$

$$1 \leq b_m = \left(1 + \frac{xy}{m^2}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{xy}{m^2}\right)^{m^2}\right]^{1/m} = \left(e_{m^2}(xy)\right)^{1/m}$$

$$\downarrow m \rightarrow \infty$$

$$1$$

$$\underbrace{\left(e^{xy}\right)^{1/m}}_{\downarrow m \rightarrow \infty} = 1$$

dunque $b_m \rightarrow 1$

$$(4) e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e_m(x) = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq 1+x$$

$$\uparrow$$

$$\forall m > \lfloor |x| \rfloor + 1$$

dunque passando al limite si ha la 5

$$(5) \quad e^x \leq 1 + x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

S. deve provare che $(1-x)e^x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(1-x)e_n(x) = (1-x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{<} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$\uparrow$ $n > n_0$

$$n_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$$

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

$\uparrow$
 1

ovvero, $\forall n > n_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$

$$e_n(x) \cdot (1-x) < 1$$

da cui, passando al limite per
 $n \rightarrow \infty$ si ha la Ter. $\Downarrow$

Da queste proprietà seguono tutte
 le proprietà dell'esponentiale
 (crescita, continuità etc)

che erano state provate in precedenza

1) $e^x \nearrow$ (usando $1+x \leq e^x \forall x \in \mathbb{R}$)

1) e^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1+x \leq e^x \leq 1+xe \leq 1+xe^x \quad \forall x \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} e^x \leq \lim_{x \rightarrow 0} (1+xe^x)$$

ovvero e^x continua in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0+x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^{x_0} \quad \checkmark$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (usando $e^x \geq 1+x$)

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ ($e^{-x} = 1/e^x \quad \forall x > 0 \dots$)

4) $f(x) = e^x \quad f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[=]\inf_{\mathbb{R}} e^x, \sup_{\mathbb{R}} e^x[$

infatti e^x continua, $\mathbb{R}$ intervallo allora

vale teorema valori intermedi: ovvero

$e^{\mathbb{R}}$ è un intervallo di estremi $\inf_{\mathbb{R}} e^x, \sup_{\mathbb{R}} e^x$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$1+x \leq e^x \leq 1+xe^x$$

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x & \forall x > 0 \\ 1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq e^x & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\text{dunque } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \forall k > 0$$

Segue dal fatto che

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{k+1}} \right)^{k+1} \geq \left(1 + \frac{x}{k+1} \right)^{k+1} \geq 1 + \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

Quindi $f(x) = e^x$ è continua, strettamente
crescente definita su un intervallo



esiste $f^{-1}(x) = \ln(x)$ continua, strettamente

$$\ln(x) :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Allora esiste $g(x) = f^{-1}(x) = \log_e x$

$$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad g \nearrow \quad (e^x \nearrow)$$

$$\bullet \quad g(1) = 0 = \log_e 1 \quad (e^0 = 1)$$

$$\bullet \quad \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \quad \left(e^x = \frac{1}{e^{-x}}\right)$$

$$\bullet \quad \log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad (e^{x+y} = e^x e^y)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty\right)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+\right)$$

$$\bullet \quad \log(x) \text{ \u00e9 continua } \forall x > 0 \quad (e^x \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

$$1+x=y \quad \xrightarrow{\parallel} \quad \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1}$$

$$y=e^x \quad \xrightarrow{\parallel} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

$$\bullet \quad \boxed{\log(1+x) < x} \quad \forall x > -1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{deriva de } e^x \geq 1+x \quad \forall x \\ \log e^x \geq \log(1+x) \quad \forall x > -1 \end{array} \right)$$

$$\bullet \quad \boxed{\frac{1}{x+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\left(\text{deriva de } e^x \geq 1+x \right)$$

$$e^x \geq 1+x \Rightarrow e^{-y} \geq 1-y$$

$$y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow e^{-\frac{1}{x+1}} \geq 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{x+1}} \geq \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x+1}} \leq 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\bullet \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0^+ \right] \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \right)$$

perciò $\left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\log y} = 0^+ \right)$
 $x = \log y$

$$\bullet \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0^- \right] \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \right)$$

$x = e^y$
 $= \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y =$
 $= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{e^{-y}} = 0^-$

Cambiamento di base per i logaritmi

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_{10} e}$$

in fatti, questa equivale a

$$\log_{10} \log_e x = \log_e x$$

$$x = 10^{\log_{10} x} = \left(e^{\log_{10} 10} \right)^{\log_{10} x} = e^{\log_e x} = x \quad \checkmark$$