

Lezione nro 20 - Seconda parte

Titolo nota

07/11/2011

Formule di Stirling

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \forall n \geq 1$$

Exercise

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

lim

$\sqrt[n]{Q_n}$

$$Q_n = \frac{n!}{n^n}$$

Esame

$$\text{Se } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = l$$

$$\text{allora } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Q_n} = l$$

E ora

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \rightarrow e \quad \checkmark$$

Teorema (limiti funzioni vs limiti successioni)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pda per A -

Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(i) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

(ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \left[x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \right]$.

Om (i) $\Rightarrow$ (ii) è già stato provato

(ii) $\Rightarrow$ (i) lo si dimostra per assurdo

per semplicità si propone la dimostrazione

per intero

Om Questo Teorema non serve a calcolare
il limite di una funzione

Om Questo Teorema è utile per ottenere

limiti di successioni a partire da

limiti di funzioni che siano noti

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} y \sin \frac{1}{y} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$$

come pure

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 1$$

Ques Inoltre questo Teorema serve a provare

che $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Esempio $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

Infatti $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty \Rightarrow \sin x_n = 1 \rightarrow 1$

$y_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty \Rightarrow \sin y_n = -1 \rightarrow -1$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

dim
Supponiamo $x, l \in \mathbb{R}$

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \quad x_n \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad x_n \in A \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} > 0 \quad \forall n > \bar{n} \quad |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Si va per assurdo

Supponiamo $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

Troviamo $\exists \{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0$ e $f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in A \quad 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon_0$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n > 0 \quad \exists x_n \in A \quad 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$$

olunque n è arbitrario

$$\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{e} \quad f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

Teorema (Bolzano Weierstrass)

Sia $\{x_n\}_n$ una successione reale

Se $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ovvero $\{x_n\}$ limitata)

allora $\exists \{x_{k_m}\}_m$ convergente

Quesito

Per capire questo Teorema, ci osservi che la successione

$$\{Q_n\}_n = \{\sin(n)\}_n$$

è certo limitata, ma di certo non so come provare se e dove converge

Ma per il Teorema di B.W.

(Bolzano Weierstrass) mi sa che

$$\exists \{Q_{k_m}\} = \{\sin(k_m)\}_m$$

$$\text{e } \sin(k_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L$$

Qm. la successione può non convergere, ma

l'im. l'essere $\{X_n\} \Rightarrow \exists \{X_{k_n}\}$ convergente

olim (Si usa il Metodo di Bisezione)

$\#\{X_n\}_n = \infty$, dunque se si prende

$$m = \frac{a+b}{2}$$

$\{X_n\}_n \cap [a, m]$ ha ∞ termini
o

$\{X_n\}_n \cap [m, b]$ " " "

Supponiamo che $\#\{X_n\}_n \cap [a, m] = \infty$

(se lo sono entrambi prendiamo quello di sinistra)

$$a_1 = a \quad b_1 = m$$

e quindi $\#\{X_n\}_n \cap [a_1, b_1] = \infty$

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$\# \{X_n\} \cap [a_1, m_1] = \infty$$

o

$$\# \{X_n\} \cap [m_1, b_1] = \infty$$

In tal modo si costruisce una successione

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m < b_m \leq \dots \leq b_1 \leq b \\ b_m = a_m + \frac{b-a}{2^m} \\ \# \{X_n\} \cap [a_i, b_i] = \infty \quad \forall i=0, \dots, m \end{array} \right.$$

$$\{a_m\} \nearrow, \quad a_m \leq b \quad \forall m \Rightarrow a_m \rightarrow l_a$$

$$\{b_m\} \searrow, \quad b_m \geq a \quad \forall m \Rightarrow b_m \rightarrow l_b$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^m} \Rightarrow l_a = l_b = l$$

$$\text{Ora sia } A_i = \{k : a_k \in [a_i, b_i]\}$$

$$i=0, 1, \dots, m, \dots$$

$$A_0 \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_0 = \min A_0 \quad (\text{Axioma minimo intero})$$

$$A_1 \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_1 = \min (A_1 \cap \{k \geq k_0\}) \quad "$$

$$A_2 \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_2 = \min (A_2 \cap \{k \geq k_1\}) \quad "$$

$$A_m \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_m = \min (A_m \cap \{k \geq k_{m-1}\}) \quad "$$

In Tal modo si costruisce

$\{X_{k_m}\}_m$, sottosuccessione di $\{X_n\}_n$

per costruzione, e tale che

$$a_m \leq X_{k_m} \leq b_m$$

dunque, per il Teorema dei 2 carabinieri:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{k_m} = L \quad \swarrow \searrow$$

Esempio $\{X_n\} = \{(-1)^n\}$ non è convergente ma

è limitata e infatti esiste $\{X_{k_m}\} = \{(-1)^{2m}\}$

Successioni di Cauchy

Def $\{a_n\}_n$ si dice "Successione di Cauchy"

$$\text{se } \underline{\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} > 0 : \forall n, m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

Teorema $\{a_n\}$ successione reale

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

dim

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \quad \forall n, m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < 2\varepsilon$$

$$\text{infatti } |a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l|$$



Qm Questo teorema afferma che

$$\{\text{successioni convergenti}\} \subseteq \{\text{succ. di Cauchy}\}$$

Qm Ma la cosa interessante è che

vale il viceversa, ovvero

$$\{\text{successioni Cauchy}\} \subseteq \{\text{succ. convergenti}\}$$

Teorema $\{Q_n\}$ successione reale

Se $\{Q_n\}_n$ è di Cauchy allora $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = l \in \mathbb{R}$

Lemma 1 $\{Q_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow \{Q_n\}$ è limitata

dim

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} > 0 \forall m, n > \bar{m} \quad Q_m - \varepsilon < Q_n < Q_m + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{m} > 0 \quad \forall m > \bar{m} \quad m = \bar{m} + 1 \quad Q_{\bar{m}+1} - 1 < Q_m < Q_{\bar{m}+1} + 1$$

$$\text{ovvero } |Q_m| \leq C = \max\{|Q_{\bar{m}+1} + 1|, |Q_{\bar{m}+1} - 1|\}$$

$$\forall m > \bar{m}$$

$$\text{Inoltre } \max_{i=0 \dots \bar{m}} \{|Q_i|\} = K$$

$$\text{dunque } |Q_m| \leq \max\{C, K\} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow$

Lemma 2

$\{Q_n\}$ di Cauchy,
 $\exists \{P_n\}$ convergente a $l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = l$

dim

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_1 > 0 \quad \forall m, n > m_1 \quad |Q_m - Q_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_2 > 0 \quad \forall m > m_2 \quad |Q_m - l| < \varepsilon$$

$$|q_n - l| = |q_n - q_{k_n} + q_{k_n} - l| \leq |q_n - q_{k_n}| + |q_{k_n} - l|$$

$$\bar{m} = \max\{m_1, m_2\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \begin{cases} |q_{k_m} - l| < \varepsilon & \text{essendo } q_{k_m} \text{ conv.} \\ |q_m - q_{k_m}| < \varepsilon & \text{essendo } q_m \text{ di Cauchy} \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m > \bar{m} \quad |q_m - l| < 2\varepsilon \quad \swarrow$$

olim

Dato $\{q_n\}$ di Cauchy

- Per il Lemma 1 $\{q_n\}$ è limitato
- Per il Teorema di Bolzano Weierstrass esiste $q_{k_n} \rightarrow l$
- $\{q_n\}$ è di Cauchy e contiene una sottosuccessione convergente a l

$$\text{per il Lemma 2} \quad q_n \rightarrow l \quad \swarrow$$