Lezione n. 19 - 10 novembre 2011

Titolo nota 06/11/2011

Oss $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$B \subseteq A$ " " " B

allora

$\exists \lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = \ell$

Oss Se $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

x_0 punto interno di A

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Allora $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]-\infty, x_0[}(x) = \ell$

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]x_0, +\infty[}(x) = \ell$

Ricordiamo anche

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

Se $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]-\infty, x_0[}(x) = \ell$

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{|]x_0, +\infty[}(x) = \ell$

allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

L'analogo delle restrizioni per $\{a_n\}$ sono le estratte

Esempio $\{a_n\}_n = (-1)^n \quad n \in \mathbb{N}$

$k_n = 2n \quad \{a_{2n}\}_n = \{(-1)^{2n}\}_n = \{1\}_n$

$h_n = 2n+1 \quad \{a_{2n+1}\}_n = \{-1\}_n$

Esempio $\quad a_n = 3n \quad n \in \mathbb{N}$

$k(n) = n^2 \nearrow \quad k(0)=0 \quad k(1)=1 \quad k(2)=4 \quad k(3)=9 \ldots$

$\{a_n\}_n = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$
$\quad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,$

$\{a_{n^2}\}_n = \{a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16} \ldots\}$
$= \{0, 3, 12, 27, 48, \ldots\}$
$k(0)=0 \quad k(1)=1 \quad k(2)=4$

Esempio $\quad a_n = \log(n+1) \quad n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}_n = \{0, \log 2, \log 3, \log 4 \ldots\}$

$\{c_n\}_n = \{a_{3n-2}\} = \{a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$
$= \{\log 2, \log 5, \log 8, \log 11$

$\{d_n\} = \{a_{n^2+1}\}$

Teorema $\{a_n\}_{n\in S}$ succ. reale

Se $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

allora $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ $\forall k: S \to S$ strett. crescente

ovvero

Se una successione converge

allora tutte le sue estratte convergono.

Oss $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$

Teorema $\{a_n\}_{n\in S}$ succ. reale

$\exists k: S \to S \nearrow$ $a_{k_n} \longrightarrow \ell_k$

$\exists h: S \to S \nearrow$ $a_{h_n} \longrightarrow \ell_h$, $\ell_k \neq \ell_h$

allora $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

Esempio $\{(-1)^n\}_n$ non converge

infatti

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$

$1 \neq -1$ $\Rightarrow a_n$ non converge

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$

Oss Anche le sottosuccessioni hanno ∞ termini

(infatti sono successioni a loro volta)

Esempio

$$\boxed{a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

$$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$$

$$a_{n^2} = \frac{n^2}{n^2+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n^2} = 1$$

Esempio

$$a_n = (-1)^n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \nexists$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

Teorema $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $\forall k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$$

Continuiamo a vedere il seguente

Teorema (Unicità del limite)

$\{a_n\}_n$ succ. reale

Se il limite esiste allora è unico

dim

per assurdo $\exists\, l_1 \neq l_2$ due limiti

Esempio

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \text{ è pari} \\ \frac{n}{n^2+1} & n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$a_{2n} = -\frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad k_n = 2n$$

$$a_{2n+1} = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad h_n = 2n+1$$

$$\begin{cases} \bullet\ k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \\ \bullet\ a_{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad a_{h_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{cases} \implies a_n \to 0$$

Oss Ovvero, in questo caso si ha

$$\{a_{h_n}\}_n \cup \{a_{k_n}\}_n \equiv \{a_n\}_n$$

e quindi il limite di $\{a_n\}$ è determinato dai limiti di a_{k_n} e a_{h_n}

Teorema

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale

- $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\nearrow$, $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\nearrow$ | $k(\mathbb{N})\cup h(\mathbb{N})=\mathbb{N}$
- $a_{k_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} l \iff \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}=l$
- $a_{h_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} l \iff \lim_{n\to\infty} a_{h_n}=l$

allora $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

<u>dim</u> suppongo $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 > 0 : \forall n > n_1 \quad l - \varepsilon < a_{k_n} < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 > 0 \quad \forall n > n_2 \quad l - \varepsilon < a_{h_n} < l + \varepsilon$

$\nexists \; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l - \varepsilon$

prendiamo $\bar{n} = \max\{k_{n_1}, h_{n_1}\}$

In tal caso, $n > \bar{n} \Rightarrow n > k_{n_1} \overset{k\nearrow}{\geq} n_1$

$n > h_{n_2} \geq n_2$

$n \in k(S) \Rightarrow \exists m \in S \quad n = k_m \overset{n > \bar{n}}{>} k_{n_1} \overset{k\nearrow}{\Rightarrow} m > n_1 \Rightarrow l - \varepsilon < a_{k_m} < l + \varepsilon$

$n \in h(S) \Rightarrow \exists g \in S \quad n = h_g \underset{n > \bar{n}}{>} h_{n_2} \underset{h\nearrow}{\Rightarrow} g > n_2 \Rightarrow l - \varepsilon < a_{h_g} < l + \varepsilon$

dunque

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \lightning$

<u>Esempio</u> $a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ pari} \\ -\dfrac{1}{n+7} & n \text{ dispari} \end{cases}$

$a_{2n} = \dfrac{1}{2n} \searrow 0$

$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$a_{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+8} \nearrow 0$

$\lightning$

Teorema (Permanenza segno)

$\{a_n\}_{n \in S}$ succ. reale

se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l > 0$

allora $\exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad a_n > 0$

dim

$l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{l}{2} \ \exists n_1 > 0 : \forall n > n_1 \quad \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < a_n$

$\frac{l}{2} > 0$

$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad a_n > 0$

$\not{c}$

Teorema (se $\{a_n\}$ ha limite allora limitata)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. reale

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

allora $\exists\, c>0 \;:\; |a_n| < c \quad \forall n\in\mathbb{N}$

dim

Hp. $\forall \varepsilon>0 \;\exists n_0>0 \;:\; \forall n>n_0 \quad l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$

$\varepsilon=1 \quad \exists n_1>0 \;:\; \forall n>n_1 \quad l-1<a_n<l+1$

$\quad '' \qquad '' \qquad '' \qquad -|l|-1<a_n<|l|+1$

$\Downarrow$

$\exists n_1>0 \;:\; \underline{\underline{\forall n>n_1}} \quad |a_n| \le \underline{|l|+1}$

$\underline{\underline{k}} = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_1}|\}$

$\Downarrow$

$\exists\, c = \max\{k, |l|+1\} \;:\; |a_n| \le c \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Teorema (Confronto)

$\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ reali

- $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = l$ $\lim_{n \to +\infty} b_n = m$ $\Longrightarrow l \leq m$
  $a_n \leq b_n \ \forall n$

- $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $a_n \leq b_n \ \forall n \Longrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$

- $\exists \lim b_n = -\infty$, $a_n \leq b_n \ \forall n \Longrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

Teorema (dei 2 carabinieri)

$\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ $\{c_n\}_n$ successioni reali

- $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = l = \lim_{n \to +\infty} c_n$ $\quad l \in \mathbb{R}$

- $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq 10^{48}$

allora $\exists \lim_{n \to +\infty} b_n = l$

dim

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_a>0 : \forall n>n_a \quad l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_c>0 : \forall n>n_c \quad l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon$$

$$\bar{n}=\max\{n_a, n_c, 10^{48}\}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad \begin{cases} l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon \\ l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon \\ a_n\leq b_n\leq c_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<l+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=l$$

↯

Teorema (algebrico) $a_n \xrightarrow[n]{} l \quad b_n \to m$

① $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m$ (se $l+m$ non è indet.)

② $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m$ (se $l \cdot m$ non è indet.)

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ (se $b_n \neq 0$) (se l/m non è ind.)

① non vale se $l = +\infty \quad m = -\infty$

infatti $a_n = n \quad a_n \to +\infty$

$b_n = -2n \quad b_n \to -\infty$ ma $a_n + b_n \to -\infty$

oppure

$a_n = 2n \quad a_n \to +\infty$ ma $a_n + b_n \to +\infty$

$b_n = -n \quad b_n \to -\infty$

② " " " $l = 0 \quad m = \infty$

③ " " " $l = 0 \quad m = 0$ o $l = \infty \quad m = \infty$

Teorema (limitato × infinitesimo = infinitesimo)

$\{a_n\}_n \quad \{b_n\}_n$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ • $|b_n| \le M \quad \forall n \ge n_0$

allora $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

dim

Hp $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 > 0 \ \forall n > n_1 \quad |a_n| < \varepsilon$

ma $|b_n| \le M \quad \forall n$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 > 0 \quad \forall n > n_1 \quad |a_n \cdot b_n| \le M \cdot |a_n| \underset{M \cdot \varepsilon}{\wedge}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 > 0 \quad \forall n > n_1 \quad |a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$

$\bar{\varepsilon} = M\varepsilon$

$\forall \bar{\varepsilon} > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad |a_n \cdot b_n| < \bar{\varepsilon}$

$a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ✓

Oss $\quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R} \Rightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$

infatti

$\big|\,|a_n| - |l|\,\big| \le |a_n - l|$

Oss $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |l| \;\cancel{\Rightarrow}\; a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Infatti presa

$a_n = (-1)^n$

$$|a_n| = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \underline{\text{ma}} \quad \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

Teorema

$\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \underline{\text{se}} \quad |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Teorema (Criterio della radice)

$\{a_n\}_n$ successione reale, $a_n \geq 0$

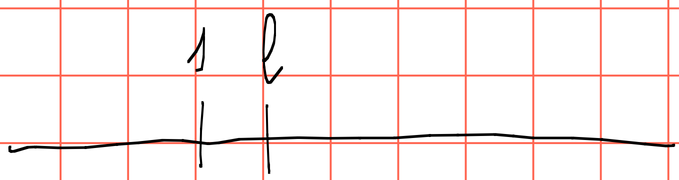
$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

1) $0 \leq l < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $1 < l \implies \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

dim

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 > 0 \ \forall n > n_1 \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$



$$\boxed{\varepsilon = \frac{l-1}{2}}$$

$$l - \varepsilon = l - \frac{l}{2} + \frac{1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1$$

$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists n_2 > 0 \quad \forall n > n_2 \qquad 1 < \frac{l+1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$

'' '' '' $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n < a_n$

ma $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log\left(\frac{l+1}{2}\right)} = +\infty$

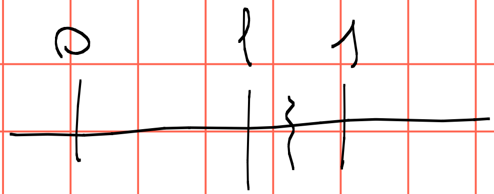
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

1) $0 \le l < 1$, $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l$, $a_n \ge 0$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_3>0\ \forall n>n_3 \quad l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_3>0\ \forall n>n_3 \quad 0 \le \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$$



$$\varepsilon = \frac{1-l}{2}$$

$$l+\varepsilon = l + \frac{1}{2} - \frac{l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1$$

$$\varepsilon = \frac{1-l}{2} \quad \exists n_4 : \quad \forall n>n_4 \quad 0 \le \sqrt[n]{a_n} < \frac{l+1}{2}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad 0 \le a_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\log\left(\frac{l+1}{2}\right)} = 0$$

poiché $\log\left(\frac{l+1}{2}\right) < \log(1) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Oss $\boxed{\ell = 1}$ non si può dire a priori

$$\begin{cases} a_n = n & \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1 \\ a_n \to +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_n = 1/n & \sqrt[n]{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e^0} = 1 \\ b_n \to 0 \end{cases}$$

Teorema (Criterio del rapporto)

$\{a_n\}_n$ successione reale, $\boxed{a_n > 0}$

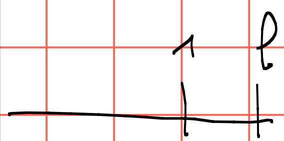
$$\boxed{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell}$$

1) $0 \le \ell < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) $1 < \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

dim (non è richiesta)

1) $\ell > 1$ Ts $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$



fissato $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$ $\quad \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell-1}{2} \overset{!}{=} \frac{1+\ell}{2} > 1$

Fissato $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$ $\exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n}$ $\quad \frac{1+\ell}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\Updownarrow \quad \exists \bar{m} \ \forall m > \bar{m} \quad \left(\frac{1+\ell}{2}\right) \cdot a_m < a_{m+1}$$

$$a_{\bar{m}} < a_{\bar{m}+1} = \left(\frac{\ell+1}{2}\right) a_{\bar{m}} < a_{\bar{m}+2} = a_{\bar{m}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 < \dots < a_m$$

$$a_m = a_{\bar{m}} \cdot \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{m-\bar{m}}$$

dunque

$$\exists \bar{m} : \forall m > \bar{m} \qquad a_m = a_{\bar{m}} \cdot \left[\frac{2}{\ell+1}\right]^{\bar{m}} \cdot \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^m = K \cdot \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^m$$

ed essendo $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^m = +\infty$ si ha la Tesi

Il caso $0 \leq \ell < 1$ è perfettamente analogo

Teorema

$\{a_n\}$ successione reale, $a_n > 0$

$$\boxed{\text{Se } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \text{ allora } \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l}$$

Oss Tutti questi criteri non dicono nulla nel caso $\boxed{l = 1}$

Infatti

$$\begin{cases} \{a_n\}_n = \{n\}_n \text{ è t.c. } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \boxed{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \text{e } \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{b_n\}_n = \{1/n\}_n \text{ è t.c. } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \boxed{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \\ \text{e } \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = 0} \end{cases}$$

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

infatti per il criterio rapporto

$a_n = n!$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Oss in particolare si osserva che

$$\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$$

infatti per il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

dunque

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Oss In particolare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) = +\infty$$

cosa non difficile da vedere in quanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1^n = 1 \quad \forall n$$ e dunque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1) \geq (n+1)$$

Esercizio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log 4} = e^0 = 1$$

poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log 4}{n} = 0$

Esercizio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{100}} = ?$

dim

$$\lim_{n} \sqrt[n]{n^{100}} = \lim_{n} e^{\frac{100}{n}\log n} =$$

$$= \lim_{n} e^{100 \cdot \frac{\log n}{n}} = e^{0} = 1$$

in quanto $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

Oss $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \overset{x=e^y}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = +\infty$$

Successioni Monotone

Def $\{a_n\}$ si dice "monotona strett. crescente"

se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

"monotona strett. decrescente" se $a_n > a_{n+1} \; \forall n$

(debolmente si mette $\leq$ o $\geq$ risp.)

Oss $a_n \nearrow^{=} \Rightarrow \boxed{a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n}$

$\Rightarrow a_{\bar{n}} \leq a_n \quad \forall n > \bar{n}$

Infatti $a_n - a_{\bar{n}} = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{\bar{n}+1} - a_{\bar{n}})$

≥ 0

in quanto $a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n$

Vale pure il viceversa (ovvio!)

$\forall n > \bar{n} \quad a_n \leq a_{\bar{n}} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$ ↯

Esempio $a_n = n$ è monot. $\nearrow$

$a_n = 1/n$ " " $\searrow$

Così come succedeva per le f.ni

Teorema (successioni monotone hanno limite)

$\{a_n\}$ successione reale

$a_n \nearrow=$ $\quad (=\searrow)$

allora

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

$\quad (\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\})$

dim

$$\Lambda = \sup_n a_n \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} a_n \le \Lambda \quad \forall n & (a) \\ \forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n} : \ \Lambda-\varepsilon < a_{\bar{n}} & (b) \end{cases}}$$

$$a_n \nearrow= \ \Rightarrow \boxed{\forall n > \bar{n} \quad a_{\bar{n}} \le a_n} \ (c)$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \quad \Lambda-\varepsilon \overset{(b)}{<} a_{\bar{n}} \overset{(c)}{\le} a_n \overset{(a)}{\le} \underset{\Lambda+\varepsilon}{\underset{\wedge}{\Lambda}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n > \bar{n} \quad \Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \Lambda$$

$\boxed{\text{Un problema di interessi composti}}$

Sia C un capitale iniziale che in un tempo T viene raddoppiato ($i = 100\%$)

$t=0$

$$C \longrightarrow C_T = C \cdot (1+1)$$

Supponiamo di calcolare gli interessi dopo $T/2$ e successivamente rivalutare

$C_{\frac{T}{2}} = C \cdot (1 + \frac{1}{2})$ all'interesse i per $T/2$

$$\overset{}{C} \longrightarrow \overset{t=T/2}{C(1+\tfrac{1}{2})} \longrightarrow \overset{t=T}{C(T) = C\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

e si osserva che $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 > (1+1)^1$

Analogamente

$$C \longrightarrow \overset{t=T/3}{C\left(1+\tfrac{1}{3}\right)} \longrightarrow \overset{t=\frac{2T}{3}}{C\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^2} \longrightarrow \overset{t=T}{C\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3}$$

e si osserva $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 > \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 > (1+1)^1$

Per induzione si arriva a

$$C \longrightarrow \overset{t=T/n}{C\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{t=T}{C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e si dovrebbe provare che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} > \cdots > \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 > (1+1)^1$$

ovvero $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow$

Ma ci si aspetta anche che

$$e_n \le K$$

e infatti si prova che

$$e_n \le 3 \quad \forall n$$

Dunque e_n strett. crescente, limitata

$$\Longrightarrow \exists\ e = \lim_{n\to\infty} e_n = 2,718\ldots$$

Dunque se i è l'interesse che si prende

allora $e^i = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$

è l'interesse percepito rivalutando istante per istante il capitale !!