Lezione n.ro 18

Titolo nota — 08/11/2011

Cardinalità

Def Dato un insieme A, diciamo "cardinalità di A" e la indichiamo con $\#A$ quel numero n per cui esiste

$$\varphi : I_n = \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow A$$

biiettiva.

Oss Se $\#A = n$ allora $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Ma per trattare con n.ri ∞ è necessario un'altro approccio

Def Diciamo che A e B sono "equipotenti" se hanno la stessa cardinalità, ovvero quando $\exists\ \varphi : A \to B$ iniettiva $(\#A \leq \#B)$

$\exists\ \psi : B \to A$ iniettiva $(\#A \geq \#B)$

Oss prendiamo come def. il Teorema di Cantor Bernstein

Oss Se $\#A = n$ e $B \subsetneq A$

allora $\nexists\ \varphi : A \to B$ iniettiva

Oss Se $\#A = n$ allora $\#\mathbb{P}(A) = 2^n$

$\uparrow$ insieme dei sottoinsiemi di A

Teorema $A \neq \emptyset$ allora

$\nexists\ \varphi : A \to \mathbb{P}(A)$ suriettiva

dim

$$\varphi : A \to \mathbb{P}(A)$$
$$x \longmapsto A_x = \varphi(x)$$

Sia $B \in \mathbb{P}(A)$, $B = \{x : x \notin \varphi(x)\}$

$\overline{?}$ $B \notin \varphi(A)$

Supponendo $B \in \varphi(A)$ allora $\exists\, \bar{x} \in A : \varphi(\bar{x}) = B$

se $\bar{x} \notin B$ allora $\bar{x} \in \varphi(\bar{x}) = B$ assurdo

se $\bar{x} \in B$ allora $\bar{x} \notin \varphi(\bar{x}) = B$ assurdo

ne segue che $B \notin \varphi(A)$ e dunque

φ non può essere suriettiva $\lightning$

Ma per gli insiemi infiniti le cose cambiano infatti

Esempio Sia $\mathbb{P}=\{2n \quad n\in\mathbb{N}\}$

$\exists\, \varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{P}$ iniettiva $\quad \varphi(n)=2n$

$\exists\, \psi:\mathbb{P}\to\mathbb{N}$ iniettiva $\quad \psi(n)=\frac{n}{2}$

dunque $\#\mathbb{N}=\#\mathbb{P}$

Ma non solo

Esempio $\#\mathbb{N}=\#\mathbb{Q}$

dim

Infatti preso il seguente diagramma proviamo

$\#\mathbb{N}=\#\mathbb{Q}\cap[0,+\infty[$ (da cui segue la Tesi)

	1	2	3	4	5	6	7
1	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$	$5/1$	$6/1$	
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$		
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$		
4	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$		
5	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5$		

$$\{\underset{a_1}{1/1}\}\quad \{\underset{a_2}{2/1},\underset{a_3}{1/2}\}\quad \{\underset{a_4}{3/1},\underset{a_5}{2/2},\underset{a_6}{1/3}\}\quad \{\underset{a_7}{4/1},\underset{a_8}{3/2},\underset{a_9}{2/3},\underset{a_{10}}{1/4}\}$$

e in questo modo si costruisce

$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ iniettiva

Def Dato un insieme A, diciamo che

A è "finito" se $\# A = n$

A è "numerabile" se $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to A$ iniettiva

Con questo definizione $\mathbb{Q}$ è numerabile

Teorema $\mathbb{R}$ non è numerabile

dim

proveremo che $]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ non è numerabile

$x \in]0,1[$ se $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$

dove $\alpha_i \in \{0,1,\dots,9\} \quad \forall i \geq 1$

Per assurdo $]0,1[$ numerabile: in tal caso

$$]0,1[= \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}\dots \\
x_2 &= 0,\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}\alpha_4^{(2)}\alpha_5^{(2)}\dots \\
x_3 &= 0,\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)}\alpha_4^{(3)}\alpha_5^{(3)}\dots \\
x_4 &= 0,\alpha_1^{(4)}\alpha_2^{(4)}\alpha_3^{(4)}\alpha_4^{(4)}\alpha_5^{(4)} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Consideriamo $\alpha_k^{(k)}$ e costruiamo un numero

$\overline{X}$ nel modo seguente

$$\overline{X} = 0,\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3}\,\overline{\alpha_4}\ \cdots$$

dove

$$\overline{\alpha_1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_1^{(1)} > 5 \\ 9 & \text{se } \alpha_1^{(1)} \leq 4 \end{cases}$$

$$\overline{\alpha_2} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_2^{(2)} > 5 \\ 9 & \text{se } \alpha_2^{(2)} \leq 4 \end{cases}$$

$\cdots$

$$\overline{\alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_k^{(k)} > 5 \\ 9 & \text{se } \alpha_k^{(k)} \leq 4 \end{cases}$$

$\cdots$

In questo modo

$\overline{X} \neq X_1$ perché $\overline{\alpha_1} \neq \alpha_1^{(1)}$

$\overline{X} \neq X_2$ " $\overline{\alpha_2} \neq \alpha_2^{(2)}$

$\cdots$

$\overline{X} \neq X_k$ " $\overline{\alpha_k} \neq \alpha_k^{(k)}$

$\cdots$

e quindi $\overline{X}$ non è nella lista, ma

questo è assurdo $\lightning$

Esercizio $0<a<b \Rightarrow \begin{cases} a^x < b^x & \forall x>0 \\ a^x > b^x & \forall x<0 \end{cases}$

$$a^x < b^x \iff \left(\frac{b}{a}\right)^x > 1$$

$$\iff e^{x \log \frac{b}{a}} > 1 = e^0$$

$$\iff x \log \frac{b}{a} > 0$$

$$\iff \left(\text{essendo } b>a \text{ e dunque } \frac{b}{a}>1 \text{ e dunque } \log\frac{b}{a}>0\right)$$

$$x>0$$

$$a^x > b^x \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x > 1$$

$$\iff x \underbrace{\log \frac{a}{b}}_{<0} > 0$$

ma $a<b$

perciò $\frac{a}{b}<1$

perciò $\log\frac{a}{b}<0$

$$\iff x<0$$

Esercizio

Calcolare lo sviluppo di $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha > 0$,

in un intorno di $x=0$ (centrato in $x=0$)

fino all'ordine 3.

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \qquad \forall x > -1 \qquad (1+x > 0 \text{ necess.})$$

$$= e^{\alpha \log(1+x)}$$

$$x \xmapsto{g(x)} \alpha \log(1+x) \xmapsto{h(x)} e^{\alpha \log(1+x)}$$

$$g(x) = \alpha \log(1+x)$$

$$h(y) = e^{y}$$

$x=0$

$$g(x) = \alpha \log(1+x) = \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= \alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + o(x^3)$$

$$h(y) = e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

Ora debbo calcolare $(h \circ g)(x) = h(g(x))$

$$f(x) = h(g(x)) = 1 + \left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + o(x^3)\right]^2$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3$$

$$+ o\left(\left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3\right)$$

$$f(x) = h(g(x)) = 1 + \left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\alpha^2 x^2 - 2 \cdot \alpha x \cdot \frac{\alpha x^2}{2} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha^3 x^3 + o(x^3)\right]$$

$$+ o\left(\alpha^3 x^3 + o(x^3)\right)$$

Osserviamo che $o(\alpha x^3 + o(x^3))$

$$= o(x^3)$$

come pure $x^4 = o(x^3)$ $x^5 = o(x^3)$ etc

$$f(x) = h(g(x)) = 1 + \left[\alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\alpha^2 x^2 - \cancel{2} \cdot \alpha x \cdot \frac{\alpha x^2}{\cancel{2}} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha^3 x^3 + o(x^3)\right]$$

$$+ o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + x^2\left[-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right] + x^3\left[\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right] + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha}{6} \cdot x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)$$

Più in generale

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 +$$

$$+ \binom{\alpha}{5} x^5 + \dots + \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)$$

dove $\binom{\alpha}{0} = 1$ $\quad \binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!}$ $\quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \qquad \binom{\alpha}{4} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}$$

e in generale $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$

Esercizio

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$

dim

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+o(x^3)$$

$$(1-x)^\alpha = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+o(x^3)$$

$$(1-x)^{-1} = 1+x+\frac{(-1)(-2)}{2}x^2-\frac{(-1)(-2)(-3)}{6}x^3+o(x^3)$$

$$= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$

$$\sqrt{65} = \sqrt{1+64} = 8\cdot\sqrt{1+1/64}$$

$$= 8\cdot\left(1+1/64\right)^{1/2}$$

$$\simeq 8\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right)$$

Si è presa l'identità $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+ \dots$ con $x=1/64$ $\alpha=1/2$ e si è trascurato il resto. Quanto sia lecita questa approx lo si vedrà con la formula Taylor resto Lagrange

Successioni

Esempio ① $\{a_n\}_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n}} \qquad \begin{matrix} n & \longmapsto & 1/n \\ \cap & & \\ \mathbb{N}\setminus 0 & & \mathbb{R} \end{matrix}$$

② $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_n = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$

Questa non è una successione

③ $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{P}}$ Attenzione

④ $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_n \qquad \{c_n\}_n = \{a_{7n-3}\}_n$

$7\cdot1-3=4 \quad 7\cdot2-3=11 \quad 7\cdot3-3=18 \qquad = \{a_4, a_{11}, a_{18}, \dots\}$

Def Diciamo "semiretta" di $\mathbb{N}$ un insieme

S se $\exists\ [a, +\infty[$ semiretta di $\mathbb{R}$

con $a > 0$ e $\boxed{S = \mathbb{N} \cap [a, +\infty[}$

Esempio $S = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$

$= \mathbb{N} \cap [3, +\infty[$ è una semiretta

Esempio $S = \{100, 101, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 100\}$

$= \mathbb{N} \cap [100, +\infty[$ è una semiretta

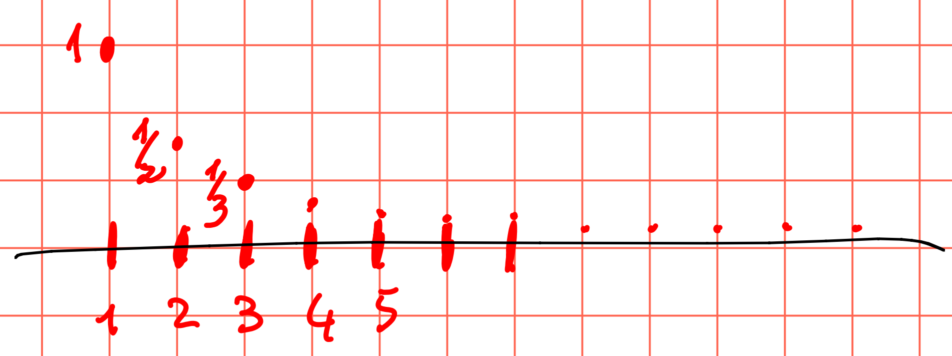
Esempio $\mathbb{N}$ è una semiretta : $\mathbb{N} = [0,+\infty[\cap \mathbb{N}$

Controesempio $\mathbb{P} = \{0,2,4,\dots\}$ Non è una semiretta

Oss In generale $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

Def Diciamo "successione reale" $\{a_n\}_{n \in S}$ una funzione $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ con S semiretta

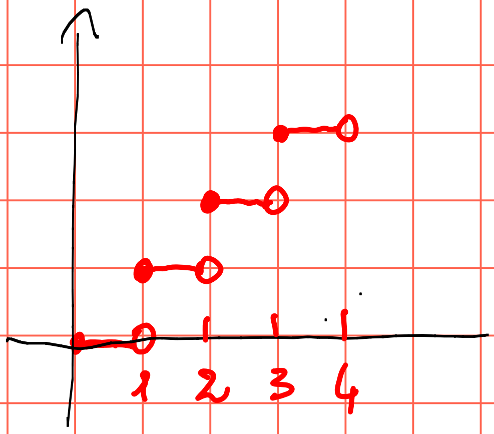
$a_n = 1/n$



Def Dato $x \in [0,+\infty[$, diciamo "Parte intera di x" e lo indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ il più grande intero minore o uguale a x

$\lfloor 1 \rfloor = 1 \qquad \lfloor 0{,}5 \rfloor = 0 \qquad \lfloor 0 \rfloor = 0 \qquad \lfloor 2{,}1 \rfloor = 2$

...



$\lfloor \sqrt{65} \rfloor = 8$

$8 \leq \sqrt{65} < 9$

Ora chiaramente, una successione, vista come funzione $S \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto a_n$$

risulta "continua $\forall n \in S$" in quanto i punti di S sono tutti ISOLATI

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{n-3}\right\}_{n \in S} \leftarrow$ $\boxed{\text{Successione}}$

$$f: S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n-3}$$

$S = [4, +\infty[\cap \mathbb{N} = \{4, 5, 6, \dots\}$

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n \in S}$ $\boxed{\text{non è}}$

una successione in quanto $S = \mathbb{P}$ non

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{n-3}\right\}_{n\in S} \leftarrow \boxed{\text{Successione}}$

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n-3}$$

$S = [4, +\infty[\cap \mathbb{N}$
$= \{4, 5, 6, \dots\}$

Esempio $\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in S}$ non è una successione; infatti $S = \mathbb{P}$ non è una semiretta

Esempio $\{a_n\}_{n\in L} = \left\{\frac{1}{n-100}\right\}_{n\in L}$

$$L = \{0, 1, \dots, 99\} \cup \{101, 102, \dots, n, \dots\}$$

L non è una semiretta poiché $L = \mathbb{N}\setminus\{100\}$

ne segue che

$\{a_n\}_{n\in L}$ non è una successione

Oss L'interesse, data una successione, è scoprire cosa succede per $n >> 1$

in quanto per $n=5$ la f.ne $f(5)=a_5$

è continua in $\boxed{n=5}$ (5 è p.to isolato)

Oss L'unico punto di accumulazione comune a tutte le semirette è

$+\infty$

ergo, l'unico limite che si studia per le successioni è

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

Ricordo

$f: A \to \mathbb{R}$ $+\infty$ p.d.a. per A

$$\lim_{x \to +\infty} f = l \in \mathbb{R}$$

se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 : \forall x \in A \;\; x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Per le successioni, $A = S = \{ n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \underbrace{\forall n \in S}_{\forall n \in \{n : n \geq n_0\}} \ n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall \overset{n \text{ n.ro naturale}}{n} > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$\underline{\lim_{n \to +\infty}} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\underline{\lim_{n \to +\infty}} a_n = +\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists N > 0 : \forall n > N \quad a_n > M$

$\underline{\lim_{n \to +\infty}} a_n = -\infty$ se $\forall M < 0 \ \exists N > 0 : \forall n > N \quad a_n < M$

Esempio $\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

infatti $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall n > N \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$N = N(\varepsilon)$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

dunque fissato $\varepsilon > 0$ prendo $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 : \forall n > N \quad \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$\rightarrow$ $\varepsilon = 1/3$ $\quad N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 = \lfloor 3 \rfloor + 1 = 4$

$$n > 4 \Rightarrow 1/n < 1/3 \ ?$$

$\rightarrow$ $\varepsilon = 3/100 \quad N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor + 1 = 34$

$$n > 34 \qquad \frac{1}{n} \overset{?}{<} \frac{3}{100}$$

<u>Esempio</u> $a_n = n^2 \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

$$\forall M > 0 \ \exists N > 0 : \forall n > N \quad n^2 > M$$

$$n^2 > M \iff n > \sqrt{M}$$

fissato $M > 0 \qquad N = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 > \sqrt{M}$

$$n > N \qquad n^2 > \left(\lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 \right)^2$$

$$= \left(\lfloor \sqrt{M} \rfloor \right)^2 + 1 + 2 \lfloor \sqrt{M} \rfloor$$

$$> M$$

Quindi la situazione è + semplice per le successioni: ho solo 3 casi

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

contro i 9 casi delle funzioni!

MOLTO IMPORTANTE

Si era provato che

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} f: A \to \mathbb{R} \quad +\infty \text{ p.d.a. per } A \\ B \subseteq A, \quad " \quad " \quad " \ B \\ \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f_{|B}(x) = \ell$$

dunque

Se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

allora, posto $f(n) = a_n$, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f(n)\right)$$

Esempio $\lim_{n\to+\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty} y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Esempio $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{1-\cos 1/y}{1/y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} y^2\left(1-\cos\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Esempio $\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(e^{1/n} - 1\right) = 1$

segue da $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Esempio $\lim_{n\to+\infty} n \log\left(1+1/n\right) = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Esempio $a_n = (-1)^n$ $\quad a_n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{}$

Infatti i limiti possibili sono e: $+1$ e -1

$\ell = 1$ $\quad \exists \varepsilon = 1 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n_N > N : \left| (-1)^{n_N} - 1 \right| \geq 1$

$\exists \varepsilon = 1 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n_N = 2N+1 : \left| \quad \right| = 2 > 1$

$\ell = -1$ $\quad \exists \varepsilon = 1 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n_N = 2N : \left| (-1)^{2N} + 1 \right| = 2 > 1$

$\lightning$

Ma in qualche modo si osserva che

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

Ma queste sono cosa?

Lemma Data $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente allora $k(n) \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Oss Il lemma vale anche se prendo $k : S \to S$ dove S semiretta di $\mathbb{N}$

dim.

Per induzione su n

$n=0 \quad k(0) \geq 0 \qquad (k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Supponiamo (Hp. induttiva) che $k(n) \geq n$

$$k(n+1) \underset{k \nearrow}{>} k(n) \underset{\text{Hp. Indutt.}}{\geq} n.$$

$$\Downarrow$$

$$k(n+1) \geq n+1$$

Def Data $\{a_n\}_{n \in S}$ successione reale

data $k: S \to S'$ strett. crescente

diciamo $\{a_{k_n}\}_{n \in S'} = \{a_{k(n)}\}_{n \in S'}$

"sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in S}$"

o

"successione estratta da $\{a_n\}_{n \in S}$"

Esempio $\{a_n\}_n = \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$k(n) = 2n \quad \{a_{k_n}\} = \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(-1)^{2n}\}$

$= \{1\}_{n \in \mathbb{N}}$

$h(n) = 2n+1$

$$\{a_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \{-1\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\{a_{2n}\} = \{\underset{a_0}{1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_4}{1}\}$$

$$\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$\{a_{2n+1}\} = \{\underset{a_1}{-1}, \underset{a_3}{-1}, \underset{a_5}{-1}, \}$$

Esempio $\{a_n\}_n = \{3n\}_n \qquad a_n = 3n \qquad n\in\mathbb{N}$

$k(n) = n^2 \qquad k(0)=0 \quad k(1)=1 \quad k(2)=4 \quad k(3)=9$

$$\{a_n\}_n = \{\underset{a_0}{0}, \underset{a_1}{3}, \underset{a_2}{6}, \underset{a_3}{9}, \underset{a_4}{12}, \underset{a_5}{15}, \underset{a_6}{18}, \dots\}$$

$$\{a_{n^2}\}_n = \{a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16} \dots\}$$

$$= \{0, 3, 12, 27, 48, \dots\}$$

Esempio $a_n = \log(n+1)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}_n =$

$\{c_n\}_n = \{a_{3n-2}\} = \{a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$

Teorema $\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

allora $\forall k : S \to S \nearrow$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$

Oss Il viceversa è banale, poiché tra tutte le sottosuccessioni c'è anche la successione medesima

Oss Il Teorema precedente è molto utile per provare che una succ. $\{a_n\}$ non ha limite

Teorema $\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale

Se $\exists k_1 : S \to S \nearrow$: $\lim_{n\to\infty} a_{k_{1n}} = l_1$

$\exists k_2 : S \to S \nearrow$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_{k_{2n}} = l_2$ $\quad (l_1 \neq l_2)$

allora $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

Oss Anche le sottosuccessioni hanno ∞ termini

(infatti sono successioni a loro volta)

Esempio $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$

$a_{n^2} = \frac{n^2}{n^2+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = 1$

Esempio $a_n = (-1)^n$ $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$

$a_{2n} = (-1)^{2n}$ $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$