Lezione n° 17 – 2 Novembre 2011

Titolo nota 24/10/2011

Oss Nella dimostrazione della continuità della funzione inversa si fa uso del seguente Teorema

Teorema (esistenza limiti dx e sin per f.ni monotone)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, f una funzione strettamente crescente in I.

Allora $\forall x_0 \in I$ $\boxed{\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$ $\boxed{\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)}$

(per gli estremi di I ne esisterà uno solo)

dim

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(I \cap]-\infty, x_0[) = \ell$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(I \cap]x_0, +\infty[) = L$$

Prendiamo $I =]a, b[$

$$\sup f(I \cap]-\infty, x_0[) = \ell$$

se

$$\begin{cases} f(x) \leq \ell & \forall x \in]a, x_0[\\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in]a, x_0[: \ \ell - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

- e inoltre $\bar{x} < x \Rightarrow f(\bar{x}) < f(x)$

Si deduce

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{x} \in]a, x_0[\ : \forall x \in]\bar{x}, x_0[\quad l-\varepsilon < f(\bar{x}) < f(x) \leq l < l+\varepsilon$

posto $\delta = x_0 - \bar{x}$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ : \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\quad l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

cioè $\quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

$\mathcal{S} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(]x_0, b[) = L$

$L = \inf f(]x_0, b[)$

se

$$\begin{cases} L \leq f(x) \quad \forall x \in]x_0, b[\\ \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{x} \in]x_0, b[\qquad f(\bar{x}) < L+\varepsilon \end{cases}$$

essendo $f \nearrow \quad x < \bar{x} \Rightarrow f(x) < f(\bar{x})$

dunque

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{x} \in]x_0, b[\quad \forall x \in]x_0, \bar{x}[\quad L-\varepsilon < L \leq f(x) < f(\bar{x}) < L+\varepsilon$

posto $\delta = \bar{x} - x_0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ : \forall x \in]x_0, x_0+\delta[\quad L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

ovvero $\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \qquad \lightning$

Controesempio (Se f non è monotona, non è detto che esistano i limiti da destra e/o sinistra)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

In questo caso $\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

ma $\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$

(Verrà provato più avanti, quando si faranno i limiti di funzioni via limiti successioni)

$o(x) \equiv$ insieme di funzioni

$\{o(1) \text{ per } x \to x_0\} \equiv \{f \text{ infinitesime per } x \to x_0\}$

$$\boxed{\underset{\text{insieme}}{o(x^n)} = \underset{\text{insieme}}{\underbrace{x^n \cdot o(1)}} \quad \text{per } x \to 0}$$

$\exists$ 1° passo $f = o(x^n)$ e dimostro $f = x^n \cdot o(1)$

2° passo $f = x^n o(1)$ " " $f = o(x^n)$

1° passo $f = o(x^n)$

significa che $\lim_{x \to 0} \frac{f}{x^n} = 0$

significa che $\exists\, \eta = \frac{f}{x^n} = o(1)$ t.c.

$$f = \eta(x) \cdot x^n$$

significa che $\underline{f = x^n \cdot o(1)}$

2° passo $f = x^n o(1)$ $x \to 0$

significa che $\frac{f}{x^n} = o(1)$ per $x \to 0$

significa che $\exists\, \eta = o(1)$ per $x \to 0$ t.c. $\underline{f(x) = x^n \eta(x)}$

significa che $f = o(x^n)$

Def Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

$f = o(1)$ e $g = o(1)$ $x \to +\infty$ $\left(\text{oppure } \lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = \infty\right)$

diciamo "f asintoticamente equivalente a g per $x \to x_0$"

e scriviamo "$f \sim g$ per $x \to x_0$"

se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Oss Se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0}$, con f, g infinitesime (o infinite) per $x \to x_0$

allora $\boxed{f \sim (kg)}$ per $x \to x_0$

Esempio $\boxed{\operatorname{sen} x \sim x \quad \text{per } x \to 0}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\boxed{(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \to 0}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Attenzione $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 3} = 1$ ma $(x^2 + 2x + 3) \not\sim x + 3$ per $x \to 0$

infatti $\lim_{x \to 0} x^2 + 2x + 3 = 3 \neq 0, \neq \pm\infty$

$\lim_{x \to 0} x + 3 = 3 \neq 0, \neq \pm\infty$

Def Data $f(x)=o(1)$ per $x\to x_0$, se

$$\boxed{f(x)=a\cdot(x-x_0)^{\alpha}+o\left(|x-x_0|^{\alpha}\right)} \quad x\to x_0$$

allora diciamo che

"$f(x)$ è un infinitesimo di ordine α

per $x\to x_0$"

parte principale

"$\boxed{a\cdot(x-x_0)^{\alpha}}$ è la p.p. dell'infinitesimo

$f(x)$ quando $x\to x_0$"

Esempio $f(x)=\operatorname{sen}x-x=o(1)$ $x\to 0$, più precisamente

Calcolare ordine e parte principale

$$\operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

$$\operatorname{sen}x-x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x$$

$$= -\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$3 \equiv$ ordine di infinitesimo

$-\frac{x^3}{6} \equiv$ p.p.

Esempio $1-\frac{x^2}{2}-\cos x = f(x) = o(1) \quad x \to 0$

Voglio calcolare ordine e pp. per $x \to 0$

Ricordo che $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$$f(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

$$= o(x^3)$$

in questo caso ordine di infinitesimo è >3

quindi $4, 5, 6 \ldots ?$

Sviluppo ulteriormente $\cos x$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$f(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)$$

$$= -\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

ordine di infinitesimo di f $x \to 0 = 4$

$pp(f) = -\frac{x^4}{4!}$

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)}$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \Big(\quad \downarrow \quad \Big)$$

$$= -\frac{x^4}{4!} + \underbrace{\frac{x^6}{6!} + o(x^7)}$$

$$= -\frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$= -\frac{\quad}{3!} + o \qquad x \to 0$$

ovvero $f(x)$ infinitesimo ordine 3

$-\frac{x^3}{3!} = \text{p.p.}(f(x))$ per $x \to 0$

<u>Oss</u> Vedremo che <u>non</u> <u>sempre</u> è possibile determinare ordine e p.p. di un infinitesimo: $f(x) = \frac{1}{\log x} = o(1) \quad x \to 0$

ma non so dire ordine (è $< x^\alpha \ \forall \alpha > 0$)

Qui andiamo a studiare la funzione esponenziale

Per lo studio sistematico si dovrebbero conoscere le successioni, in modo da studiare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71\ldots$$

e quindi definire

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

e, a partire da questa definizione, si prova che

(a) $e^x e^y = e^{x+y} \quad \forall x,y\geq 0$ $\qquad 2^3 2^4 = 2^7$

(b) $1+x \leq e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x\geq 0$

(c) $e^x = 1/e^{-x}$!!! $\quad \forall x\geq 0$ (che permette di definire e^x per $x<0$)

(c) $\longrightarrow \exp(x) = \begin{cases} e^x & x\geq 0 \\ 1/e^{-x} & x<0 \end{cases}$

Una volta note le proprietà (a) (b) e (c)

possiamo dimostrare tutte le altre

proprietà di e^x, ovvero

<u>Teorema</u> Valgono le seguenti proprietà per e^x

(1) e^x è strettamente crescente

$$\text{D} \quad x<y \Rightarrow e^x<e^y \qquad \underline{\forall x,y\geq 0}$$

$$e^y>e^x \iff e^y>\frac{1}{e^{-x}}$$

$$\iff e^y e^{-x}>1$$

$$\iff \boxed{e^{y-x}>1}$$

ma ricordo $e^{(y-x)} \overset{\text{prop. (b)}}{\geq} 1+(y-x) > 1$

poiché $y-x>0$!

(ii) $e^0 = 1$

$$e^x = 1/e^{-x} \quad \text{prop. (c)}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x \cdot e^{-x} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{x-x} = e^0 = 1 \quad \text{prop. (e)}$$

(iii) e^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

mi basta provarlo per $x = 0$

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x e^x \quad \text{prop. (b)}$$

$$\wedge|$$

$1 + x \cdot e$ quando $x < 1$

essendo $e^x \nearrow$

$$\boxed{e^x < e^1 \text{ per } x < 1}$$

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x \cdot e$$

$$x \leq e^x - 1 \leq x \cdot e$$

$x \to 0 \downarrow$ $\qquad$ $\downarrow x \to 0$

0 $\qquad$ 0

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} e^x = 1} = e^0$$

$x_0 > 0 \quad \exists \lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$

$\exists \lim_{x \to x_0} e^{x-x_0} = 1$

$$\underbrace{1+(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ 1}} < e^{x-x_0} < \underbrace{1+e(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ 1}} \qquad \begin{matrix} |x-x_0|<1 \\ x \to x_0 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to x_0} e^{x-x_0} = 1 \qquad \Downarrow$

<u>Oss</u> $e^x \geq 1+x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow e^x > 0 \quad \forall x \geq 0$

$e^x = 1/e^{-x} \quad \forall x \geq 0$

$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $e^x \geq 1+x \qquad x \geq 0$
- $\lim_{x \to +\infty} 1+x = +\infty$

Thm confronto

$\Downarrow$

$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

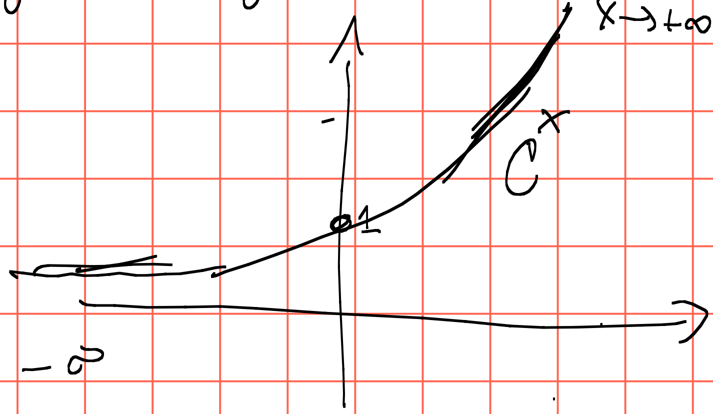
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}} \qquad y=-x$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty} e^y} = +\infty$$

$$\to \lim_{y\to-\infty} e^y = 0^+$$

$x=-y$

$$\lim_{y\to-\infty} e^y = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{e^{-y}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$



(VI) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (b)

$$1+x \le e^x \le 1+xe^x$$

$$x \le e^x - 1 \le xe^x$$

$$\begin{cases} x>0 & 1 \le \frac{e^x-1}{x} \le e^x \\ x<0 & 1 \ge \frac{e^x-1}{x} \ge e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\lim_{x\to 0^+} 1}} \le \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \le \lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \\ \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\lim_{x\to 0^-} 1}} \ge \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \ge \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$$

Exercício $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^7} = +\infty$

$$e^x \geq 1+x \qquad x>0$$

$$e^x = \left(e^{x/2}\right)^2 \geq \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{4}+x \geq 1+\frac{x^2}{4}$$

$$e^x = \left(e^{x/3}\right)^3 \geq \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \ \cdots \ \geq 1+\frac{x^3}{27}$$

$$\cdots$$

$$e^x = \left(e^{x/n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \cdots \geq 1+\frac{x^n}{n^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^7} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{x^8}{8^8}}{x^7} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8}{x^7} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{8^8}+\frac{1}{x^8}}{1}$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} x\right) \frac{1}{8^8} = +\infty$$

La funzione e^x è continua definita su $\mathbb{R}$, che è un intervallo. Dunque $e^{\mathbb{R}}$ è un intervallo a sua volta per il Teorema valori intermedi,

$$e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \left]\inf(e^{\mathbb{R}}), \sup(e^{\mathbb{R}})\right[$$

ovvero $\quad e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$f(x) = e^x$ è continua, strett. crescente e suriettiva

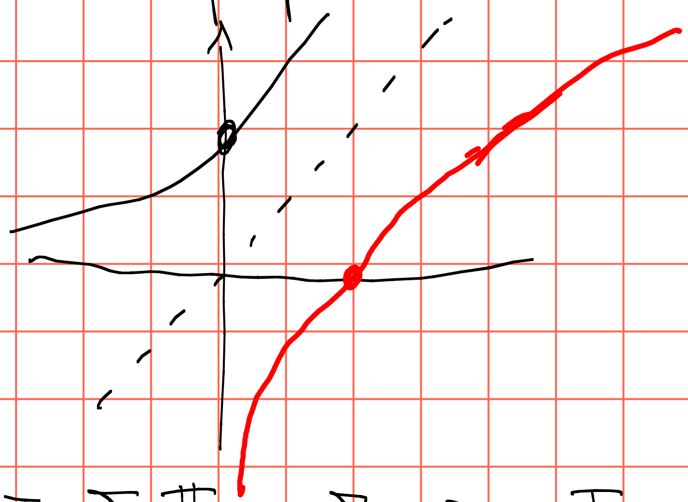
$$\Downarrow$$

$$\exists\ f^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \ln x = \log_e x$$

che è continua e a sua volta è $\nearrow$

Vediamo le proprietà di $f^{-1}(x) = \ln(x)$



- $\ln(x)$ è strettamente crescente

  segue dal fatto che e^x è strett. crescente

- $\ln(x)$ è continua

  infatti, e^x è continua, quindi anche l'inversa lo è

- $\ln(1) = 0 \longleftrightarrow (e^0 = 1)$

  $(1,0) \in \{(x, \ln(x)) \; x > 0\} \iff (0,1) \in \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f(x) = e^x \qquad f^{-1}(x) = \ln(x)$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x \quad \text{per } x > 0$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad \left(e^{x} = 1/e^{-x}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\ln 1/x} = e^{-\ln x} \iff \frac{1}{x} = \left(e^{x}\right)^{-1} = (x)^{-1} = \frac{1}{x}$$

- $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \left(e^{x+y} = e^{x}e^{y}\right)$

$$e^{\ln(x\cdot y)} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$\Updownarrow$$

$$x\cdot y = e^{\ln x}\cdot e^{\ln y} = x\cdot y$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

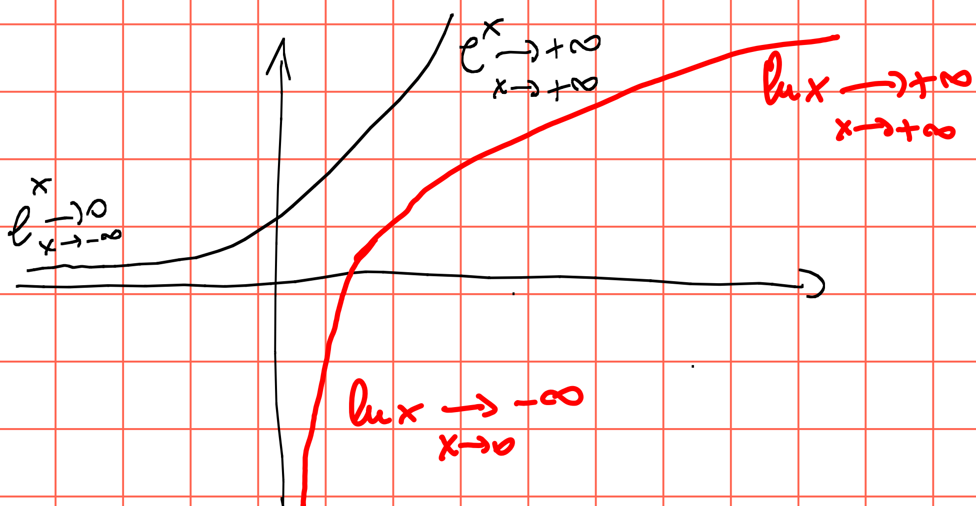
$\Downarrow \; x = e^{y}$

$$\lim_{y\to+\infty} \ln\left(e^{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty$

$\Downarrow \; x = e^{y} \qquad x\to 0 \quad y\to-\infty$

$$\lim_{y\to-\infty} \ln\left(e^{y}\right) = \lim_{y\to-\infty} y = -\infty$$



- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \left(1+x = e^t \quad t \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$$

$\parallel \quad 1+x = e^t \quad x \to 0 \quad t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(e^t)}{e^t - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$$

- $\ln(1+x) < x \quad \forall x > -1 \quad \left(\underline{\underline{e^t > 1+t}} \text{ ---- } \right)$

$1+x = e^t$

$\ln(e^t) < e^t - 1 \quad \forall t \geq 0$

$\Updownarrow$

$t < e^t - 1 \quad \forall t \geq 0$

$\Updownarrow$

$t+1 < e^t \quad \forall t \geq 0 \qquad (b)$

- $$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$e^{x} \geq 1+x \Rightarrow e^{-y} \geq 1-y$$

$$y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow e^{-\frac{1}{x+1}} \geq 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{x+1}} \geq \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x+1}} \leq 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{[\ln(x)]^k} = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left(\frac{e^t}{t^k} = \dots\right)$

- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^- \quad \forall \alpha > 0 \qquad \left(x = e^t \quad t \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty \dots\right)$

<u>Def</u> (Potenze a esponente reale)

Dato $a \in \mathbb{R}$ si definisce

$$\boxed{x^a} := e^{a \ln x} \qquad \underline{\forall x > 0} \qquad x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a$$

<u>Oss</u> Questa definizione è coerente con la definizione data nel caso in cui

$\alpha = m/n$

ovvero $e^{\frac{m}{n} \ln x} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

quando $x > 0$

$$x^3 = x x x$$

$$x^3 = e^{3 \log x} = e^{\log x^3}$$

$$\alpha \log x = \log x^\alpha$$

$$x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln x} \qquad \log x = \log_e x = \ln x$$

Cambio di base nei logaritmi

$$\boxed{\log_a b \, \log_b x = \log_a x \qquad \forall a, b > 0 \quad a \neq 1 \; b \neq 1 \quad \forall x > 0}$$

per verificare l'uguaglianza

$$a^{\log_a b \, \log_b x} = a^{\log_a x} = x$$

$$\parallel$$

$$\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = (b)^{\log_b x} = x \quad ✓$$

Nel caso $x < 0$, la potenza x^a non è definita!

Def $\forall a > 0$, $a^x \underset{\text{Def}}{:=} e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + o(x) \quad x \to 0$$

$$= 1 + x + o(x) \quad x \to 0$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = o(1) \quad x \to 0$$

$$= x + o(x) \quad x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ : \ \forall x \in A \ \ x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Cambiamento di base per il logaritmo

Esercizio $\forall a, b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, $\forall x > 0$

$$\log_a b \, \log_b x = \log_a x$$

dim

$$a^{\log_a b \, \log_b x} = \left[a^{\log_a b}\right]^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Sviluppi

$$e^x = 1 + o(1)$$
$$= 1 + x + o(x)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

etc

$$\log(1+x) = x + o(x)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x \to 0$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Esercizio $(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha\log(1+x)}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{\alpha y} = 1 + (\alpha y) + \frac{1}{2}(\alpha y)^2 + \frac{1}{3!}(\alpha y)^3 + o(y^3)$$

$$a^x \underset{\text{Def}}{:=} e^{x\log a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0^+ & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall k\geq 1 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k}} = \begin{cases} +\infty & a>1 \quad (\text{si veda } a=e) \\ 0^+ & a=1 \\ 0^+ & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\frac{a^x}{x^k} = \frac{e^{x\log a}}{e^{k\log x}} = e^{x\log a - k\log x} = e^{x\left(\log a - k\frac{\log x}{x}\right)}$$

$$\Big\downarrow x\to+\infty$$

$$+\infty$$