

Lezione n° 15 - 27 ottobre 2011

Titolo nota

24/10/2011

La funzione inversa

Esempio

Sia data $f(x) = 2x + 1 \quad x \in [0, 2]$

Questa ha immagine $f([0, 2]) = [1, 5]$

Inoltre f è biettiva da $[0, 2] \rightarrow [1, 5]$

$\Downarrow$

$\exists$ la funzione inversa $f^{-1}: [1, 5] \rightarrow [0, 2]$

In questo caso $y = 2x + 1 = f(x) \leadsto x = \frac{y-1}{2} = g(y)$

e si ha $(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in [1, 5] \quad (g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in [0, 2]$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Inoltre osserviamo

$$f \nearrow \iff g = f^{-1} \nearrow$$

$$f \text{ continua} \iff g = f^{-1} \text{ continua}$$

Sono corollari e sono dimostrabili

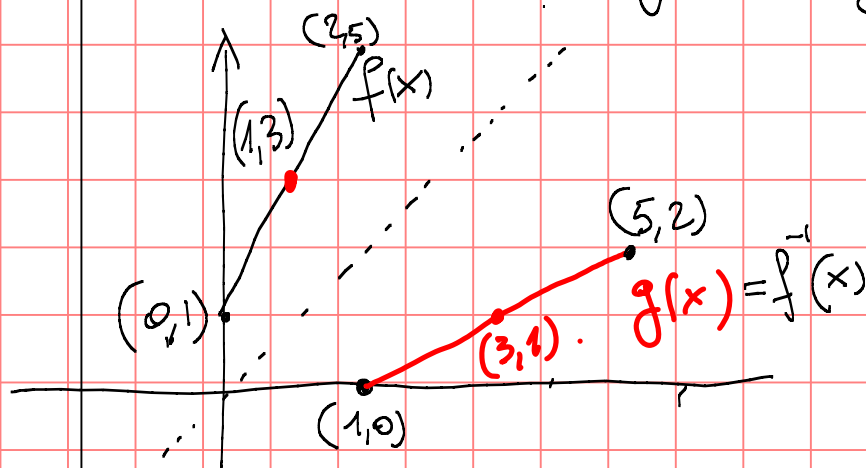
per ogni funzione $\nearrow$ (strett. crescente)

e continua su un intervallo?

$$(x, y) \in \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 2]\} = \text{grafico di } f$$

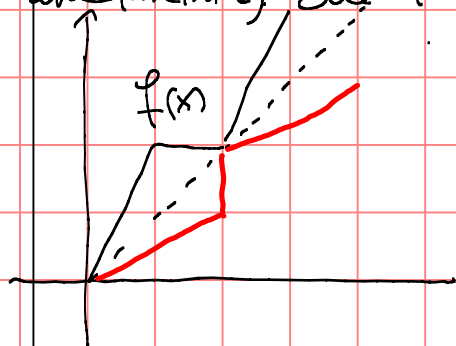
o.e.

$$(y, x) \in \{(g(y), y) \mid y \in [1, 5]\} = \text{grafico di } f^{-1}$$



Dom : Esistono funzioni crescenti (ma non

strettamente) che non sono invertibili:



$$\text{Dato } f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Se voglio invertirla su $[0, 3]$ non riesco.

in quanto troverei

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ [1, 2] & x = 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{NON È UNA FUNZIONE}$$

Però $f(x) = 2x$ su $[0, 1[$, e qui posso

invertirla con $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ su $[0, 2[$

Def (funzione inversa)

Dato $f: A \rightarrow B$ biunivoco, diciamo
"funzione inversa"

e lo indichiamo con $f^{-1}(x)$ quella funzione
 $g: B \rightarrow A$ così definita

$$\boxed{y = g(x) \text{ se } f(y) = x}$$

Per come è definita $g(x) = f^{-1}(x)$ si ha

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \quad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in B$$

Def Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice

$$\text{INIETTIVA se } \forall x, y \in A \quad [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$$

Esempio $f(x) = 2x + 1$ è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$

$$\text{supponi } f(x) = f(y) \text{ se } 2x + 1 = 2y + 1$$

$$\text{se } 2x = 2y \text{ se } x = y \quad \checkmark$$

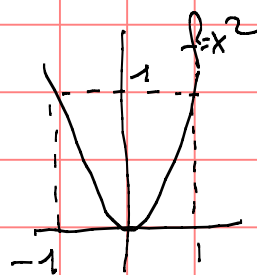
Esempio (di funzione non iniettiva)

$$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$$

f non è iniettiva in quanto

$$\forall y \in]0, +\infty[\quad \exists \sqrt{y} \text{ e } -\sqrt{y} \text{ t.c.}$$

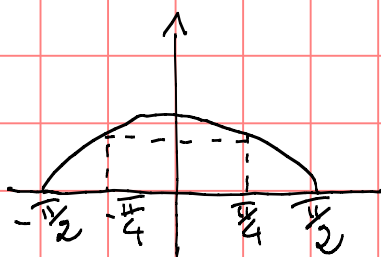
$$(\sqrt{y})^2 = (-\sqrt{y})^2 = y \quad \checkmark$$



Esempio (funzione non iniettiva)

$$f(x) = \cos x \quad f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

NON È INIETTIVA



In fatti $\forall y \in [0, 1[$

esistono $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{e } -\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\text{ t.c. } \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

Questo segue dal fatto che $f(x) = \cos x$

è una funzione **PARI**

Dom L'essere iniettiva oppure no può

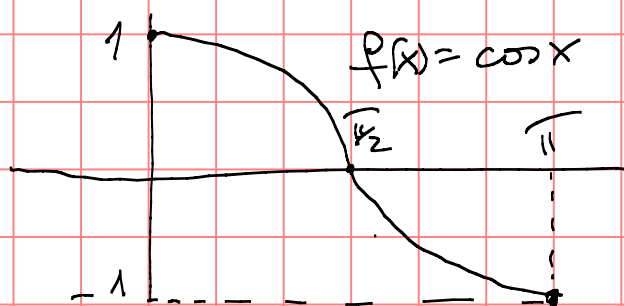
dipendere dal dominio su cui

considero la funzione

Esempio (di funzione iniettiva) $f(x) = \cos x$

su $A = [0, \pi]$ è **INIETTIVA**

(è monotona strettamente decrescente)



Def Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice
SURiettiva $\Leftrightarrow \forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y$
(ovvero $f(A) = B$)

Esempio (funzione suriettiva) $f(x) = \cos x$
 $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$

Questa f è suriettiva
(ma non è iniettiva)

Esempio (di funzione non suriettiva)

$f(x) = \cos x \quad f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

in fatti $f(x) = \cos x \geq 0 \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Questa funzione non è neppure
iniettiva.

Esempio (di funzione suriettiva)

$f(x) = x^2 \quad f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$

è suriettiva ($\forall y \geq 0, \exists \sqrt{y} \in [0, +\infty[$
t.c. $(\sqrt{y})^2 = y$) ed è iniettiva.

Osservazione importante

$f: A \rightarrow B = f(A)$ strettamente crescente

allora f iniettiva ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

f suriettiva ($B = f(A)$)

allora $f: A \rightarrow f(A) = B$ è biiettiva

allora $\exists g = f^{-1}: B = f(A) \rightarrow A$

ovvero la stretta monotonia mi garantisce

l'invertibilità !!

Teorema

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

1) f continua $\forall x \in A$

2) f strettamente crescente.

$$c = f(a) < f(b) = d$$

Allora

1) $\exists g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ la funzione inversa,
ovvero $g(x) = f^{-1}(x)$

2) $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ è strettamente crescente

dim

1) Segue dall'osservazione precedente, in quanto

stretta crescente $\Rightarrow$ iniettività di $f: A \rightarrow f(A)$

2) f strettamente crescente

ne

$$x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ma è vero anche

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ strett. crescente} \\ \text{ne} \end{array} \right.$

$$\forall y_1, y_2 \in f([a, b]) \quad y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

dove $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$

da cui segue

f strett. crescente
se

$$\forall y_1, y_2 \in [c, d] \quad y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

se
 f^{-1} è strett. crescente

teorema

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f strettamente crescente

allora sono equivalenti le seguenti proposizioni

i) f continua su I

ii) $f(I)$ è un intervallo

$\Downarrow$ f continua e strettamente crescente e I intervallo

$\Downarrow$

f continua e I intervallo

$\Downarrow$ (Teorema dei valori intermedi)

$f(I)$ è un intervallo

$\Uparrow$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$

f strettamente crescente

I intervallo

$f(I)$ intervallo

$\Rightarrow f$ continua su I

non esiste f non è continua su I

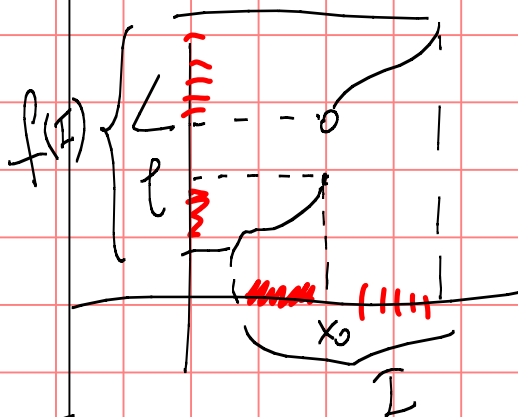
$\Rightarrow \exists x_0 \in I : f$ non è continua in x_0

ma $x_0 \in I$ intervallo, quindi $x_0 \text{ p.d.e. } I$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Quello in x_0 si determina uno "scoppio"



$$f(x_0) \in]l, L[$$
$$f(x_0) \in f(I) \setminus]l, L[$$

(non ha controllo su $f(x_0)$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

indietro
reintegro

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Per la funzione f è strettamente crescente, da cui

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I, x < x_0 \Rightarrow f(x) < L \\ \forall x \in I, x_0 < x \Rightarrow L < f(x) \end{array} \right.$$

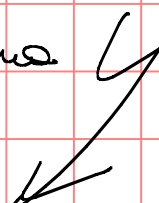
$$\text{Quindi }]L, L[\cap f(I) = \emptyset \neq f(x_0)$$

$$\text{Preso quindi } x_1 \in I \cap \{x < x_0\} \\ \wedge \\ x_2 \in I \cap \{x_0 < x\}$$

$$\text{si ha che } [f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$$

($f(I)$ è un intervallo) e nel contempo

$$]L, L[\not\subseteq [f(x_1), f(x_2)]$$

ASSURDO $\Rightarrow f$ continua 

Teorema (continuità delle f.ue inverse)

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

- f continua
- f strettamente crescente

$$f(a) = c < d = f(b)$$

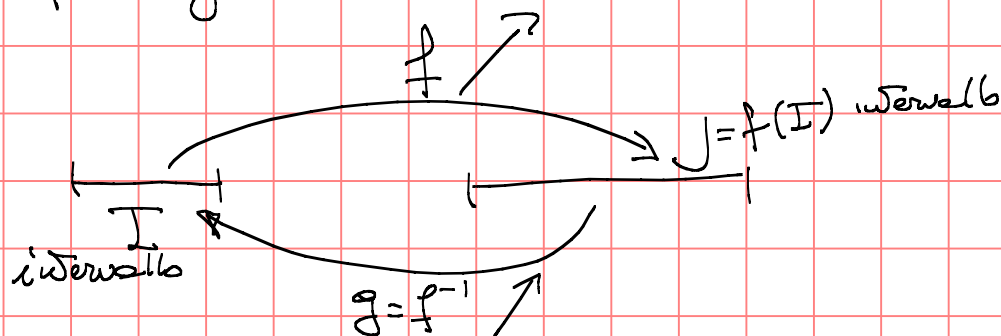
$$\text{allora } \exists g: [c, d] \rightarrow [a, b], \quad g = f^{-1},$$

che è strettamente crescente & continua
dim

Che esista f^{-1} e che sia strettamente crescente

è noto. Debbo provare la continuità

$$\text{di } f^{-1}(x) = g$$



Dunque

$$g: J = f(I) \rightarrow I$$

g strett. crescente

$$J = f(I) \text{ intervallo}$$

$$I = g(J) \text{ intervallo}$$

per il Teorema precedente

$$\Rightarrow g = f^{-1} \text{ è continua}$$



Infinitesimi e simbolo di Landau

Def Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A , diciamo

che " f infinitesima per $x \rightarrow x_0$ "

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Scriveremo in tal caso " $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ "

dove " $o(1)$ " si legge "o piccolo di 1"

Esempi 1) $f(x) = x$ per $x \rightarrow 0$ $x = o(1)$ per $x \rightarrow 0$

2) $f(x) = \cos x$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\cos x = o(1)$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

3) $f(x) = \sin x$ per $x \rightarrow \pi$ $\sin x = o(1)$ per $x \rightarrow \pi$

4) $f(x) = (x-1)^3$ per $x \rightarrow 1$ $(x-1)^3 = o(1)$ per $x \rightarrow 1$

Def $o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ non è una funzione ma è

un insieme di funzioni: tutte quelle che

tendono a 0 quando $x \rightarrow x_0$

Def Naturalmente, tra tutte le funzioni che

tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$ ce ne saremo di

"veloci" e di "lente": cerchiamo di chiarire!

Def $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.d.e. per A

$$f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$g = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

diciamo " $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ "

$$\text{se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Def $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f}{x \rightarrow x_0} \rightarrow 0$ "più velocemente"
di quanto $\frac{g}{x \rightarrow x_0} \rightarrow 0$

Esempio $f(x) = x^2$ $g(x) = x$ $f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \rightarrow 0$

$$x^2 = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ infatti } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Esempio $f(x) = x^4$ $g(x) = x$ $f = o(1)$ $g = o(1)$ per $x \rightarrow 0$

$$x^4 = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ infatti } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x} = 0$$

Esempio $f(x) = \sin^3 x$ $g(x) = x^2$ $f = o(1)$ $g = o(1)$ per $x \rightarrow 0$

$$\sin^3 x = o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ infatti}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Def La relazione " $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ " è una
relazione di ordine parziale in quanto

1) Se $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

allora $f \neq g$ e $g \neq o(f)$ per $x \rightarrow x_0$

2) Se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x \rightarrow x_0$

allora $f = o(h)$ per $x \rightarrow x_0$

Questo mi dice che si può stabilire una
"graduazione" di funzioni

$$x < x^2 < \sin^3 x < (1 - \cos x)^2$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \quad \quad \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = 0 \quad \text{etc}$

Ques

Si è visto che $\sin^3 x = o(x^2)$ in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

ovvero

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \sin x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x^2 \\ &= g(x) \cdot x^2 \end{aligned}$$

dove la funzione $g(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2} = o(1)$ $x \rightarrow 0$

Dunque

$$\boxed{f = o(g) \text{ per } x \rightarrow x_0}$$

per

$\exists g(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ t. c. $f(x) = g(x) \cdot g(x)$ per $x \rightarrow x_0$

Ne segue una nuova definizione per "o"

Def $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 pda per A

$$f = o(1) \quad g = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Diciamo che $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

Se $\exists \eta(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ t.c. $f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$ per $x \rightarrow x_0$

Dom le due definizioni sono equivalenti:

$$f = o(1) \quad g = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \exists \eta(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = o(1) : f(x) = \eta(x) \cdot g(x)$$

Esempio $\sin x - x = o(x), \quad x \rightarrow 0$

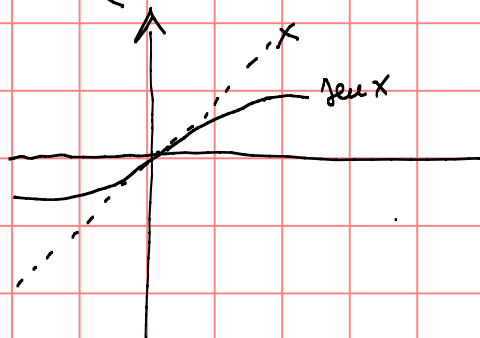
$$\sin x - x = o(1) \quad x \rightarrow 0$$

$$x = o(1) \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\text{se} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) - 1 = 0$$

$$\text{se} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \checkmark$$



osservando

"sin x"

con "x" si

commette, nell'intorno

di $x_0 = 0$, un errore

$o(x)$ per $x \rightarrow 0$!

Esempio $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = o(x^2) \quad x \rightarrow 0$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = o(1) \\ x^2 = o(1) \end{array} \right\} \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^2} = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\text{se} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Adesso bisogna fornire le regole per

l'algebra degli "o"

Algebra degli "0"

Dom In generale dovremmo lavorare con

$$o(f) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

ma a noi interessa molto il caso $x_0 = 0$

(e comunque, a meno di una traslazione, tutti i risultati sono ancora validi)

Inoltre ci interessa il confronto non tra funzioni, ma il confronto tra

$$(f(x)) \text{ e } (\text{polinomi in } x)$$

$$(i) \quad o(x^\alpha) = k \cdot o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0, \quad \forall k \neq 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\frac{f}{g} = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{ma} \quad \exists \eta(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = \eta(x) \cdot x^\alpha$$

$$\text{ma} \quad \exists \eta = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = k \cdot \frac{\eta(x)}{k} \cdot x^\alpha$$

$$\text{ma} \quad \exists \bar{\eta} = \frac{\eta}{k} = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad \frac{f(x)}{k} = \bar{\eta} \cdot x^\alpha$$

$$\text{ma} \quad \frac{f(x)}{k} = o(x^\alpha) \quad \Downarrow$$

Conseguente $o(x^\alpha) = -o(x^\alpha) \quad (k = -1) \quad x \rightarrow 0$

$$o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha) \quad (k = 2) \quad x \rightarrow 0$$

$$o(x^\alpha) - o(x^\alpha) = o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad X^\alpha \circ (X^\beta) = o(X^{\alpha+\beta}) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

Imponi $f(x) = X^\alpha \circ (X^\beta) \quad x \rightarrow 0$

ma $\exists g(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = X^\alpha \cdot (g(x) \cdot X^\beta)$

ma " " " $f(x) = g(x) \cdot X^{\alpha+\beta}$

ma $f(x) = o(X^{\alpha+\beta}) \quad x \rightarrow 0$

Conseguenza: $X^4 \circ (X^2) = X^3 \circ (X^3)$

$$= X^5 \circ (x)$$

$$= X^6 \circ (1)$$

$$= o(X^6)$$

$$= X^2 \circ (X^4)$$

$$= X \circ (X^5)$$

$$= \sqrt[3]{X} \circ (X^{5+\frac{2}{3}})$$

etc



$$(iii) \quad o(X^\alpha) + o(X^{\alpha+\beta}) = o(X^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\Rightarrow f = o(X^\alpha) \quad g = o(X^{\alpha+\beta})$$

$$\Rightarrow \exists g_1 = o(1) \quad g_2 = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x) X^\alpha \quad g(x) = g_2(x) X^{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow \text{" " " " } f(x) + g(x) = X^\alpha (g_1(x) + X^\beta g_2(x))$$

$$\Rightarrow f + g = o(X^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{perche } g_1(x) + X^\beta g_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

($\Leftarrow$) è immediato: $f = o(x^\alpha)$, $x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \exists g(x) = o(1), x \rightarrow 0 \quad f(x) = g(x) \cdot x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists g(x) = o(1) \quad 0 = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g(x) \cdot x^\alpha + 0 \cdot x^{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow f = o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta})$$

Qm $f = o(x^\alpha) \Rightarrow f = o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta})$ è immediato sempre,

$$\text{in quanto l'unione } o(x^\alpha) \subseteq o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta})$$

(è sufficiente osservare che $0 = o(x^{\alpha+\beta})$, e

$$0 + o(x^\alpha) = o(x^\alpha))$$



Conseguenze: per esempio

$$o(x^3) + o(x^5) = o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$o(x^2) + o(x) = o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{iii) } o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \text{infatti } f = o(o(x^\alpha)) \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \exists g_1(x) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x) \cdot o(x^\alpha)$$

$$\Rightarrow \exists g_1 = o(1) \quad g_2 = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists \varphi(x) = \underbrace{p(x)}_{b_1} \underbrace{q(x)}_{b_2} \text{ per } x \rightarrow 0 \quad f(x) = \varphi(x) \cdot x^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow f(x) = o(x^x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \Leftarrow \\ \Rightarrow \end{array} \right) f = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \exists g(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g(x) x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists \eta(n) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = \eta^{\frac{1}{3}}(x) \cdot \eta^{\frac{2}{3}}(x) \cdot x^q$$

$$\Rightarrow \exists g_1(x) = o(1) \quad \exists g_2(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x) g_2(x) x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists g_1(n = o(1)) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x) \cdot o(x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) = o(x^2) \quad x \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

(IV) $\circ(X^\alpha + \circ(X^\alpha)) = \circ(X^\alpha)$

$$(\Rightarrow) f = o(x^\alpha) + o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists g_1(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 : f(x) = g_1(x) \cdot (x^{\alpha_+} - (x^{\alpha_-}))$$

$$\Rightarrow \exists g_1 = o(1) \quad g_2 = o(1) \quad x \rightarrow 0 : f(x) = g_1(x) (x^\alpha + g_2(x) x^\alpha)$$

$$\Rightarrow I_1 \quad I_1 \quad " \quad f(x) = (g_1(x) + g_1(x)g_2(x))x^q$$

$$\Rightarrow \exists \bar{\gamma} = o(1) \quad x \rightarrow 0 : f(x) = \bar{\gamma}(x) \cdot x^q$$

$$\Rightarrow f(x) = o(x^2)$$

$$\left(\Leftarrow \right) \quad \theta(x) = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists g(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g(x) \cdot x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists g(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = (g(x) + o(g(x)))x^\alpha$$

$$\Rightarrow \exists g_1 = o(1) \quad \exists g_2(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) = g_1(x^\alpha + g_2 x^\alpha)$$

$$\Rightarrow f(x) = o(x^\alpha + o(x^\alpha)) \quad x \rightarrow 0 \quad \swarrow$$

Convergence

$$o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0$$

$$(V) \quad o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}) \quad x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad f = o(x^\alpha) \quad g = o(x^\beta) \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \exists g_1 = o(1) \quad \exists g_2 = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad h = g_1(x) x^\alpha \cdot g_2(x) x^\beta = f \cdot g$$

$$\Rightarrow \exists \bar{g} = o(1) \quad x \rightarrow 0 \quad h(x) = \bar{g}(x) \cdot x^{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow h = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$(\Leftarrow) \quad h = o(x^{\alpha+\beta}) \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \bar{g}(x) = o(1) \quad x \rightarrow 0 : \quad h(x) = \bar{g}(x) x^{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow \exists g_1(x) = \bar{g}^{\frac{1}{3}} = o(1) \quad g_2(x) = \bar{g}^{\frac{2}{3}} = o(1) \quad h(x) = (g_1 x^\alpha) \cdot (g_2 x^\beta)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad f = o(x^\alpha) \quad g = o(x^\beta) \quad \swarrow$$

$$(VI) \quad \frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha, \beta > 0 \quad x \rightarrow 0$$

Principio di sostituzione dell'infinitesimo

Teorema

$$f_1, f_2, g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \text{ p.d.a. per } A$$

• f_1, f_2, g_1, g_2 infinitesime per $x \rightarrow x_0$

$$\bullet \frac{f_1}{f_2} = o\left(\frac{f_2}{g_2}\right) \quad x \rightarrow x_0$$

allora sono equivalenti le seguenti
proposizioni

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} \begin{cases} \text{esiste finito} \\ \text{diverge a } \pm \infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \begin{cases} \text{esiste finito} \\ \text{diverge a } \pm \infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

La dimostrazione segue da

$$\text{per } x \rightarrow x_0 \quad \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \frac{f_1(x) + o(f_1)}{g_1(x) + o(g_1)} = \frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}{1 + o(1)} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$$

$$\text{osservando che } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 \quad \checkmark$$

Esempio

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x - \sin x}{\sin^3 x + x}$$

dim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \cos x\right]}{x^2 + [\sin^3 x]} =$$

$$1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = o(x^2)$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

(1)

$$1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = o(\sin^2 x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + o(\sin x)}{x^2 + o(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{x^2} = -1 \quad \checkmark$$

Esercizio

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

$$1 = 1 - x^2 + x^2 - x^3 + x^3$$

$$= 1 - x^2 + x^2 - x^3 + o(x^2)$$

$$= (1-x)(1+x) + x^2(1-x) + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{o(x^2)}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{In generale } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + o(x^m)$$

(dim per induzione)

Sviluppi delle funzioni elementari

$$\exp x = 0(1)$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$= x + o(x^2)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

00 Naturalmente

$$\exp x = x + o(x^2) \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow \exp x = x + o(x) \quad x \rightarrow \infty$$

$$\exp x = 1 + o(x)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\lg(x) = x + o(x^2)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\text{ord}_g x = x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

...

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6$$

$$\text{ord}_g = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$e^x = 1 + o(x)$$

$$= 1 + x + o(x^2)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\vdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m) \quad x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m} + o(x_m)$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \quad x \rightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

Esercizio

$$(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{\alpha y} = 1 + (\alpha y) + \frac{1}{2}(\alpha y)^2 + \frac{1}{3!}(\alpha y)^3 + o(y^3)$$

etc

Esercizio

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} = (1+y)^\alpha & y=-x & \alpha=-1 \\ &= 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} y^3 + o(x^3) \\ &= 1 - 1(-x) + \frac{(-1)(-2)}{2} (-x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} (-x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$