

Lezione nro 14 - 25 ottobre 2011

Titolo nota

20/10/2011

Ricordiamo che, dato $A \subseteq \mathbb{R}$

• Se A è superiormente limitato ($M_A \neq \emptyset$)
allora $\exists \lambda = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$

• $\lambda = \sup A = \min_{\text{Def}} M_A$

• $\lambda = \sup A$ se $\left\{ \begin{array}{l} a \leq \lambda \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A \quad \lambda - \varepsilon < \bar{a} \end{array} \right.$

In modo analogo si definisce

$$\lambda = \sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I)$$

$$\lambda = \sup \{ f(x) : x \in I \}$$

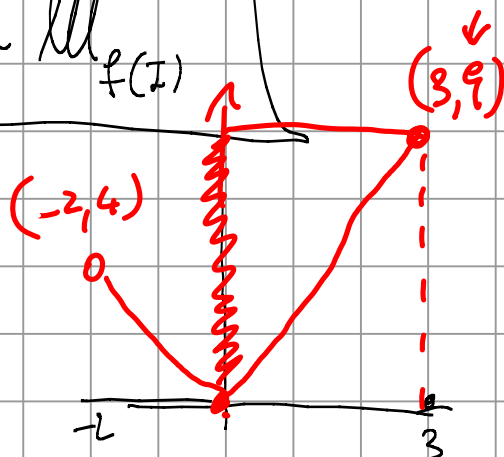
$$\lambda = \sup f(I) = \min_{\text{Def}} M_{f(I)}$$

Esempio

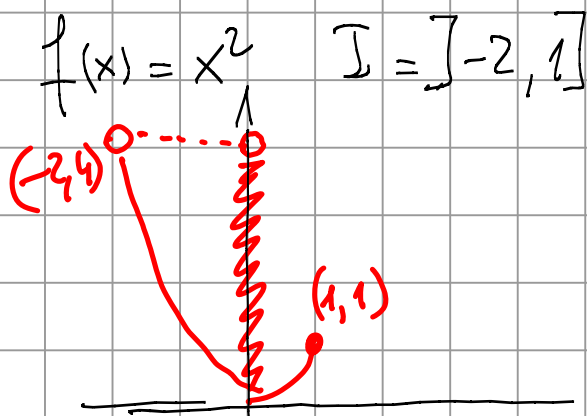
$$f(x) = x^2 \quad I =]-2, 3]$$

$$f(I) = [0, 9]$$

$$\sup f = \sup f(I) = 9 = \max f(I)$$



Esempio



$$f(I) = [0, 4[$$

$$\sup f(I) = 4$$

$$\nexists \max f(I)$$

• Se f è limitata superiormente su I
(ovvero $\exists k \in \mathbb{R} : f(x) \leq k \forall x \in I$).

(ovvero $f(I)$ è superiormente limitato)

$$\text{allora } \exists \Lambda = \sup f(I) = \sup_{x \in I} f(x)$$

vero poiché $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente!

$$\bullet \Lambda = \sup f(I) = \min_{\text{Def}} \mathcal{M}_f(I) \quad \Lambda_{\text{magg. di } f(I)}$$

$$\bullet \Lambda = \sup f(I) \text{ se } \begin{cases} b \leq \Lambda \quad \forall b \in f(I) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{b} \in f(I) : \Lambda - \varepsilon < \bar{b} \end{cases} (*)$$

Λ Minimum maggiorante $\rightarrow$

$$\begin{matrix} b \in f(I) \\ \text{se} \\ \exists x \in I \quad f(x) = b \end{matrix} \quad \text{se } \begin{cases} f(x) \leq \Lambda \quad \forall x \in I \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in I : \Lambda - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases} (*)$$

$$\bullet M = \max f(I) \text{ se } M \in f(I) \cap \mathcal{M}_f(I)$$

$$\bullet \underline{M = \max f(I)} \Rightarrow \underline{M = \sup f(I)}$$

$$\bullet \Lambda = \sup f(I) \not\Rightarrow \Lambda = \max f(I)$$

Esempio $f(x) = x+2 \quad I = [0, 2[$

$$f(I) = [2, 4[\quad \text{e}$$

$$2 = \inf f(I) = \min f(I)$$

$$4 = \sup f(I) \quad \text{ma } 4 \notin f(I) \text{ e dunque non \u00e8 massimo}$$

↓ immagine continua di un intervallo è un intervallo

Teorema (dei valori intermedi)

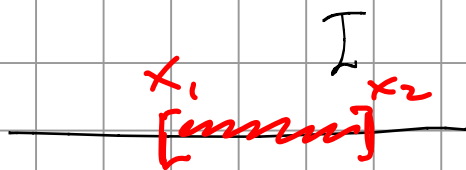
$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in I$

allora $f(I)$ è un intervallo

Def $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice "Intervallo" (di numeri reali) se $\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in I$

$$\{x : x_1 \leq x \leq x_2\} \subset I$$

oss Un intervallo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$
"senza buchi"



dim

devo provare che
✓ $f(I)$ intervallo

§ presi $y_1, y_2 \in f(I)$ con $y_1 < y_2$
allora $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$

Procedo prendendo $y_1, y_2 \in f(I)$ con $y_1 < y_2$

allora $\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

Certamente $x_1 \neq x_2$
○ $x_1 < x_2$
○ $x_1 > x_2$

Assumo $x_1 < x_2$. Essendo I un intervallo

$$[x_1, x_2] \subseteq I$$

$$f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

- continua
- $[x_1, x_2]$ è un intervallo

preso $f(x_1) < K < f(x_2)$ $\exists z \in]x_1, x_2[\text{ t.c.}$

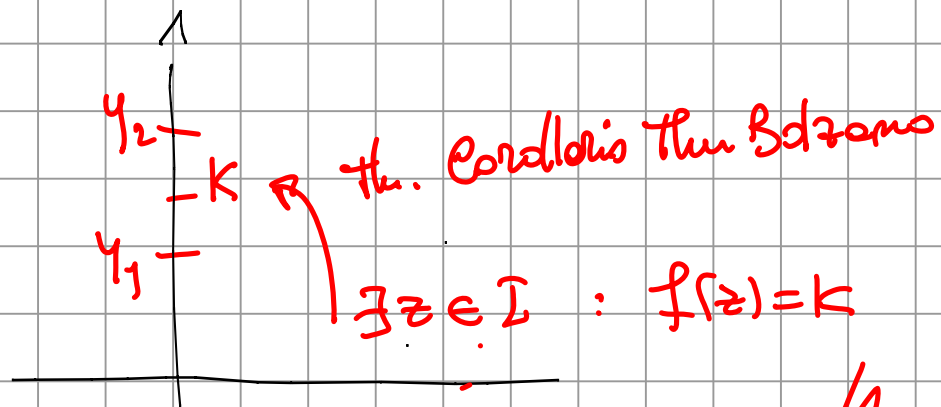
$$f(z) = K$$

Quindi

$$f(x_1) = y_1 < K < y_2 = f(x_2) \text{ con } y_1, y_2 \in f(I)$$

$\exists f(z) = K$ cioè $f(z) \in]y_1, y_2[$, $f(z) \in f(I)$

More $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$



Il Teorema dei valori intermedi permette di
provare l'esistenza e l'unicità delle $\sqrt[n]{x}$
 $\forall x \in [0, +\infty[$

Facciamo

Teorema $\forall n \geq 1 \quad \forall x \geq 0 \quad \exists y \geq 0 \quad y^n = x$

dim

Sia $c > 1$: la funzione $g(x) = x^n$ è crescente
strettamente su $[0, c]$. La f.m. $g(x)$ è
continua su $[0, c]$ e $g(0) = 0 < g(c) = c^n$

Preso $0 < x < c < c^n$, si ha che

$g(0) < x < g(c)$ e dunque deve esistere

$y \in]0, c[$: $g(y) = x$

Dunque $\exists y \in]0, c[$: $y^n = x$

ovvero $y = \sqrt[n]{x}$ e questo è unico
poiché $x^n \nearrow$ 

Corollario (senza dim!)



→ Intervallo

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in I$ (event. $-\infty$) (eventualmente $+\infty$)

allora $f(I) \subseteq \left[\inf_{x \in I} f, \sup_{x \in I} f \right]$

Esempio

$f(x) = x^2$

$I = [1, +\infty[$



$\inf_{x \in I} f(x)$
↓
 $f(I) = [1, +\infty[$
↑
 $\sup_{x \in I} f(x)$

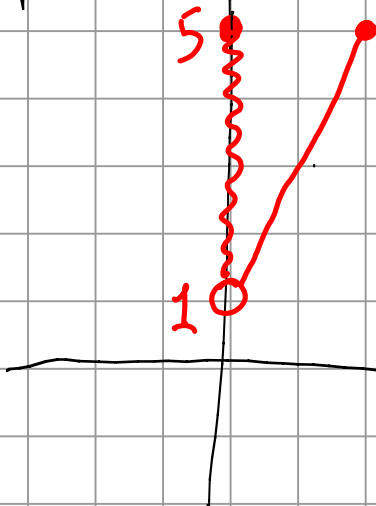
$\inf_{x \in I} f = 1$

$\sup_{x \in I} f = +\infty$

Esempio

$f(x) = 2x + 1$

$I = [0, 2]$



$f(I) = [1, 5]$

$1 = \inf_I f$

$5 = \sup_I f = \max_I f$

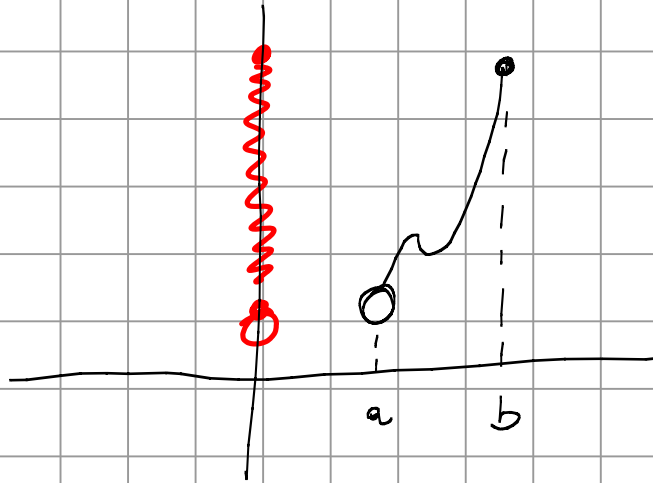
Domande (Teorema piccolo)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $[a, b]$

chiuso e limitato

Allora

$$\sup f(\underline{[a, b[}) = \sup f(\underline{]a, b])} = \sup f(\underline{]a, b[}) = \\ = \sup f(\underline{[a, b]})$$



dim

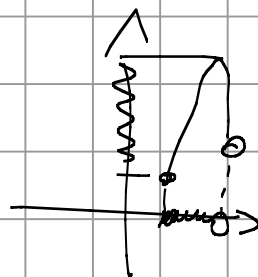
Per il Teorema dei valori intermedi, $f(I)$ è

un intervallo quando f continua e I intervallo

Proviamo che

$$\underline{\sup f([a, b[)} = \sup f([a, b])$$

$$\textcircled{1} \text{ caso } f(b) < \sup f([a, b])$$



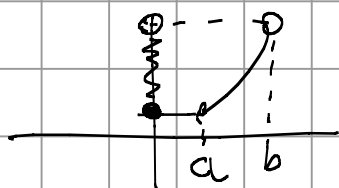
$$\Rightarrow \sup f([a, b]) = \sup f([a, b])$$

$$\textcircled{2} \text{ caso } f(b) = \sup f([a, b])$$

$$\Rightarrow f(b) = \sup f([a, b]) \text{ poich\u00e9}$$

$f(b)$ \u00e9 punto di frontiera di $f([a, b])$

$$\Rightarrow \sup f([a, b]) = \sup f([a, b])$$



Dom: Il Teorema precedente si basa sul

fatto che $f(a), f(b)$ sono

- interni a $f([a, b])$

- di frontiera per $f([a, b])$

ma in entrambi i casi non punti di accumulazione

Dom

$$\sup [a, b] = \sup [a, b] = \sup [a, b]$$

$$= \max [a, b]$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

Q00 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$[a, b]$ chiuso e limitato

f $\nearrow$

Allora $\sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} = f(\sup[a, b]) = f(b)$

$\inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} = f(\inf[a, b]) = f(a)$

Teorema (di Weierstrass)

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) f continua $\forall x \in [a, b]$.

(ii) $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.

allora

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] \text{ t.c.}$$

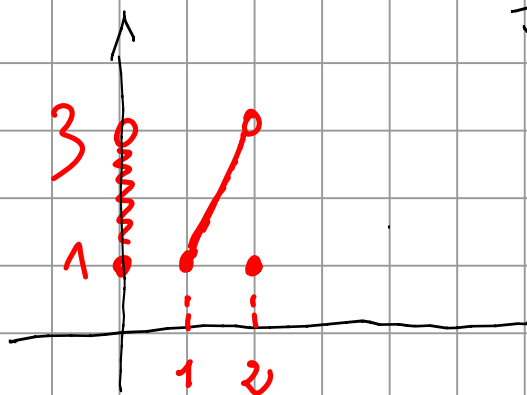
$$f(x_M) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = \sup f([a, b])$$

$$f(x_m) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = \inf f([a, b])$$

Controesempio (

f non è continua
 $[a, b]$ chiuso e limitato

$\nRightarrow$
 $\nexists \max f([a, b]), \min f([a, b])$

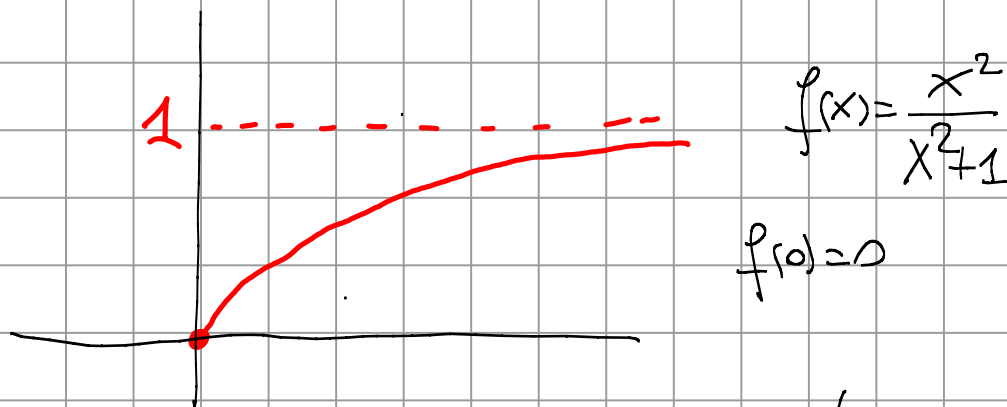


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$f(I) = [1, 3[= [\min f(I), \sup f(I)[$$

Quanto succede x=2 f non continua in $x=2$

Gegenbeispiel (f continua su I intervallo non limitato
 $\nRightarrow \exists \min f(I), \max f(I)$)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}^1}{\cancel{x^2} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} = 1$$

$f \nearrow$ su $[0, +\infty[$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1^2}{1+x_1^2} < \frac{x_2^2}{1+x_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x_1^2 + x_1^2 x_2^2} < \cancel{x_2^2 + x_1^2 x_2^2} \quad \underline{\text{Vero}}$$

$$f(I) = [0, 1[\quad \sup f(I) = 1 \text{ ma } \nexists \max f(I)$$

dim n°1 (Successioni)

$$M = \sup f([a,b])$$

M è punto di accumulazione per $f([a,b])$, dunque

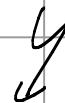
$$\exists \{y_n\} \subseteq f([a,b]) \quad y_n \rightarrow M$$

$$\text{Dunque } \exists \{x_n\} \subset [a,b] \quad f(x_n) = y_n$$

ma per il Teorema Weierstrass $\exists x_{k_n} \rightarrow \bar{x} \in [a,b]$

$$f \text{ continua in } \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(\bar{x})$$

$$y_n \rightarrow M \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow M \Rightarrow M = f(\bar{x}) = \max f(I) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n})$$



Teorema 1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$[a, b]$ chiuso e limitato

Allora f è limitata (ovvero $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b])$$

dim

Om $f(x)$ è limitata su I

de

$f(I)$ è un insieme limitato

de

$$\exists c \in \mathbb{R} : -c \leq f(x) \leq c \quad \forall x \in I$$

de

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(I) \subseteq [-c, c]$$

de

$$\exists c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in I$$

dim (Metodo di Bisezione)

* Assumo f sia illimitata superiormente su I

$$\text{ovvero } \sup_I f = \sup f(I) = +\infty$$

$$I = [a, b] \quad \text{prendo } \boxed{m_1 = \frac{a+b}{2}}$$

Se f illimitata su $[a, b]$

allora f illimitata su $[a, m_1]$ o su $[m_1, b]$

Suppongo sia illimitata su $[a, m_1]$

Chiamo $a_1 = a$ $b_1 = m_1$ e

$$\text{Considero } [a_1, b_1] \quad \boxed{m_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}}$$

Se f illimitata su $[a_1, b_1]$

allora f illimitata su $[a_1, m_2]$ o su $[m_2, b_1]$

$$\begin{aligned} & a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq \dots \leq b_m \leq b_{m-1} \leq \dots \leq b \\ & \left. \begin{array}{l} \text{P} \\ m \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_m = a_m + \frac{b-a}{2^m} \\ f \text{ illimitata su } [a_i, b_i] \quad i=0, \dots, m \end{array} \end{aligned}$$

$$m_m = \frac{a_m + b_m}{2}$$

f illimitata su $[a_m, b_m]$

allora f illimitata su $[a_m, m_m]$ o su $[m_m, b_m]$

Sia f illimitata su $[a_m, m_m]$

allora pongo $a_{m+1} = a_m$ $b_{m+1} = m_m$

$$P_{m+1} = \begin{cases} a \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq \dots \leq b_{m+1} \leq \dots \leq b \\ b_{m+1} = a_{m+1} + \frac{b-a}{2^{m+1}} \\ f \text{ illimitata su } [a_i, b_i] \quad i=0 \dots m+1 \end{cases}$$

Sia

$$z = \sup_m a_m : z \in [a_m, b_m] \subseteq [a, b]$$

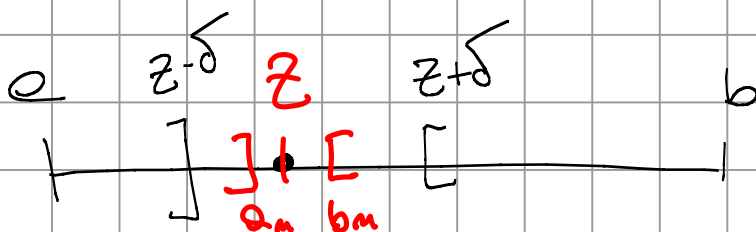
↑
per costruzione
 $\forall n \in \mathbb{N}$

f continua in z

$\Rightarrow f$ è limitata in un intorno di z

ovvero $\exists \delta > 0 \quad \forall \epsilon$.

$$\forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap [a, b] \quad |f(x)| \leq \epsilon$$



$z \in [a_m, b_m]$
 $\forall m$

$$\text{finito } \delta, \exists n: \delta > (b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$

(Si applica il principio di Archimede infatti)

$$\text{finito } \delta > 0 \exists n: 2^n > \frac{b-a}{\delta}$$

$$" \exists n: n > \log_2\left(\frac{b-a}{\delta}\right) !)$$

Ma siamo arrivati a dire

f illimitata su $[a_n, b_n]$

f limitata su $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \supset [a, b]$

ASSURDO $\Rightarrow$ f limitata su $[a, b]$



Qm si era provato che

Se f ha limite in x_0 allora f è limitata in un intorno di x_0

vale pure

Se f continua in x_0 allora f è limitata in un intorno di x_0

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$
continua in x_0 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\varepsilon = 1 \exists \delta > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$$

$$\varepsilon = 1 \quad " \quad " \quad " \quad \Rightarrow -|f(x_0)| - 1 < f(x) < |f(x_0)| + 1$$

$$\exists \delta > 0: \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad |f(x)| < |f(x_0)| + 1$$



Teorema (di Weierstraß) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1) continuo su $[a, b]$

2) $[a, b]$ chiuso e limitato

allora

$$\exists x_m, x_n \in [a, b] \text{ t.c. } f(x_m) = \min f([a, b])$$

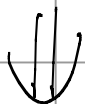
$$f(x_n) = \max f([a, b])$$

olim

Del Teorema precedente si ha che

f è limitata su $[a, b]$ ovvero

$$\exists C: |f(x)| \leq C \quad \forall x \in [a, b]$$



$f([a, b])$ è superiormente limitato

$$f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$$



$$\exists \Lambda = \sup f([a, b]) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{dobbiamo provare}$$

$$\boxed{\exists \Lambda = \max f([a, b])}$$

x Attenzione Λ non è $\max f([a, b])$

$$\Rightarrow f(x) < 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{1-f(x)}$$

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ (denominatore continuo e $\neq 0$)
 $[a, b]$ chiuso e limitato



Per il Teorema precedente $g(x)$ è limitata su $[a, b]$

ovvero

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |g(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$



$$\exists c > 0 \text{ t.c. } \frac{1}{1-f(x)} \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$



$$\exists c > 0 : \frac{1}{c} \leq 1-f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$



$$\exists c > 0 : f(x) \leq 1 - \frac{1}{c} \quad \forall x \in [a, b]$$

ma allora $1 - \frac{1}{c} \in M_f([a, b])$

ASSURDO ($1 = \sup f([a, b])$)



$$1 = \max f([a, b])$$



La funzione inversa

Esempio

Sia data $f(x) = 2x + 1 \quad x \in [0, 2]$

Questa ha immagine $f([0, 2]) = [1, 5]$

Inoltre f è biettiva da $[0, 2] \rightarrow [1, 5]$

$\Downarrow$

$\exists$ la funzione inversa $f^{-1}: [1, 5] \rightarrow [0, 2]$

In questo caso $y = 2x + 1 = f(x) \leadsto x = \frac{y-1}{2} = g(y)$

e si ha $(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in [1, 5] \quad (g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in [0, 2]$

Inoltre osserviamo

$f \nearrow$

$g = f^{-1} \nearrow$

f continua

$g = f^{-1}$ continua

Sono crescenti e sono dimostrabili

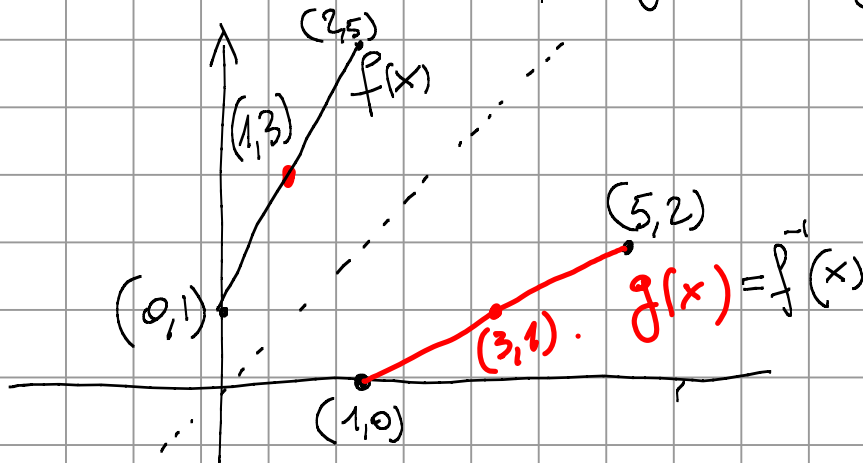
per ogni funzione $\nearrow$ (strett. crescente)

e continua su un intervallo?

$$(x, y) \in \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 2]\} = \text{grafico di } f$$

o.e.

$$(y, x) \in \{(g(y), y) \mid y \in [1, 5]\} = \text{grafico di } f^{-1}$$



Def (funzione inversa)

Dato $f: A \rightarrow B$ biunivoco, diciamo
"funzione inversa"

e lo indichiamo con $f^{-1}(x)$ quella funzione
 $g: B \rightarrow A$ così definita

$$y = g(x) \text{ se } f(y) = x$$

Per come è definita $g(x) = f^{-1}(x)$ si ha

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \quad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in B$$

Osservazione Importante

$f: A \rightarrow B = f(A)$ strettamente crescente (decrescente)

allora f iniettiva ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$!)

f suriettiva ($B = f(A)$)

allora $f: A \rightarrow f(A) = B$ è biiettiva

allora $\exists g = f^{-1}: B = f(A) \rightarrow A$

ovvero la stretta monotonia ci garantisce

l'invertibilità !!