

Lezione n. 13

Titolo nota

19/10/2011

Teorema (del confronto per i limiti)

$f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.d.e. per A

1) $\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ $\downarrow$ necessariamente!

$$\boxed{\Rightarrow} l \leq m$$

2) $\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\bullet f(x) < g(x) \quad \forall x \in A$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
($\exists \text{ risultato}$)

3) $\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

$$\bullet f(x) < g(x) \quad \forall x \in A$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
($\exists \text{ risultato}$)

dim

1) Supponiamo $x_0, l, m \in \mathbb{R}$

$$\bullet \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\bullet \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon$$

$$\text{prendiamo } \delta = \delta_1 \wedge \delta_2 = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

tenendo conto che $f(x) < g(x) \quad \forall x \in A$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$f \rightarrow l$
 $\downarrow$
 $l - \varepsilon < f(x)$

$\Downarrow$

$g(x) \rightarrow m$
 $\downarrow$
 $g(x) < m + \varepsilon$

$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < m + \varepsilon$

(x ipotetico)

e quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{l - \varepsilon} < \underline{m + \varepsilon}$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \quad l - m < 2\varepsilon$

ovvero $l - m \leq 0$ ovvero $l \leq m$

$$2) \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty} \quad + \quad \boxed{f(x) < g(x) \quad \forall x \in A}$$

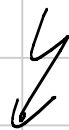
$$\Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow M < f(x)$$

(ma $f(x) < g(x)$)

$$\Rightarrow \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \Rightarrow M < g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3) analogo al 2



Om le disuguaglianze, pensando al

limite, si "rilegge" ovvero

$$" < " \xrightarrow[\text{al limite}]{\text{pensando}} " \leq "$$

Es esempio $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ per}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad !!$$

Teorema (dei due Corollari)

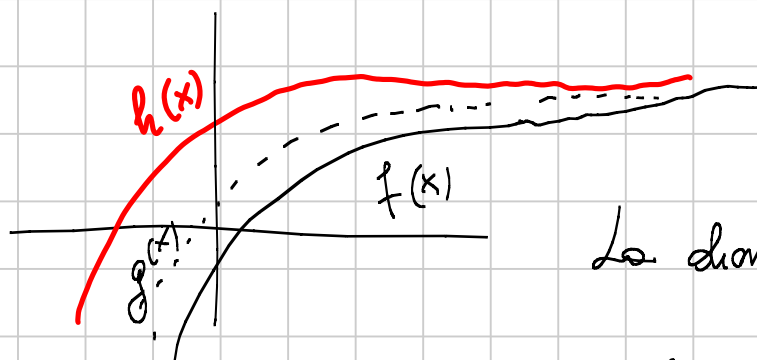
$$f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \text{ p.d.a. per } A$$

$$1) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$



La dimostrazione
si fa applicando

il Teorema del confronto. Se $l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{ma} \quad f(x) < g(x) < h(x) \quad \forall x \in A$$

e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < g(x) < \overset{l + \varepsilon}{h(x)}$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

✓

Esempio (Importante)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{Note: è della forma } \frac{0}{0}!$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{N.B. è della forma } \frac{0}{0}$$

Teorema (della permanenza del segno)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 pda per A

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$

allora $\exists \delta \in \mathcal{I}_{x_0} : f(x) > 0 \quad \forall x \in V \cap (A \setminus \{x_0\})$

dim.

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$ ($l = +\infty$ è molto più facile)

Dell'ipotesi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Prendi $\boxed{\varepsilon = \frac{l}{2}}$ $\exists \underline{V} = V(\underline{\rho}) \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \cap (\underline{V} \setminus \{x_0\})$
(retto da me) $\rho < \frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < f(x)$

e dunque

$$\exists \forall \epsilon \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \cap (V_n(x_0)) \quad f(x) > \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \checkmark$$

Dim Naturalmente il Teorema vale

anche se $\ell < 0$: Troverò un intorno in cui f è negativa.

Dim Il Teorema vale pure per le funzioni continue con $\ell = f(x_0)$

Teorema (Permanenza del segno per f in continue)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continue in x_0 p.d.a.

Se $f(x_0) > 0$ allora

$$\exists \forall \epsilon \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in \underbrace{V_n(x_0)}_{\uparrow} \cap A \quad f(x) > 0$$

Dim $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$

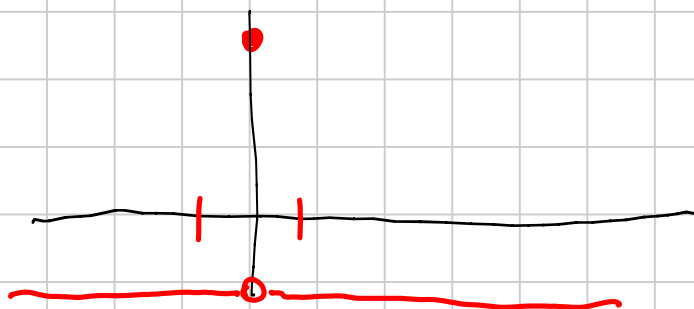
(questo vale $\forall f(x_0)$, quindi non devo escludere x_0 !!)

Controesempio (Se f non è continua in x_0 allora non funziona il Teorema)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x=0 \\ -3 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 10 > 0 \quad \text{per} \quad \forall]-\delta, \delta[\quad \exists x_\delta: f(x_\delta) < 0$$

in fatt. porta prendere $x_\delta = \frac{\delta}{2}$



Continuare le funzioni continue

- Si parte da : polinomi, $\sin x$, $\cos x$ ed e^x : funzioni continue elementari
- Operando con il Teorema algebrico, genera altre funzioni continue attraverso prodotti, somme e quozienti
- Infine trova infinite altre funzioni attraverso la Composizione

Teorema (Composizione di fcn continue)

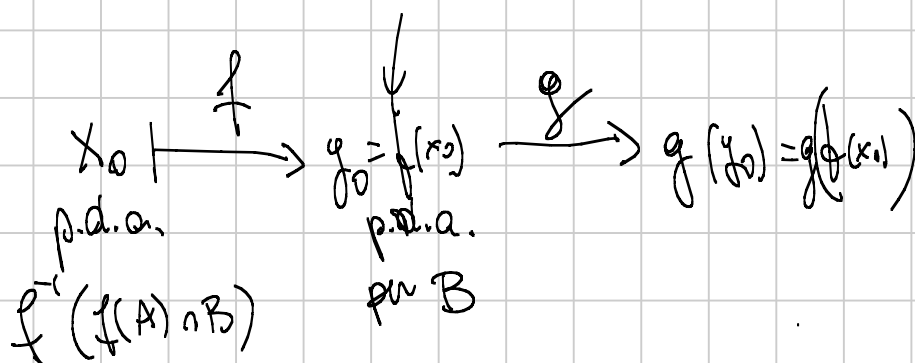
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 p.d.a. per A e $f^{-1}(f(A) \cap B)$
- $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0)$ p.d.a. per B

allora

$(g \circ f)(x)$ è continua in x_0
dim

$f: A \rightarrow f(A)$ $g: B \rightarrow \mathbb{R}$
devo avere $f(A) \cap B \neq \emptyset$ e quindi

$$\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}(f(A) \cap B) = C \subseteq A!$$



dim

$$g \text{ continua in } y_0 \stackrel{①}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$$f \text{ continua in } x_0 \quad \forall \delta > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta$$

ma $A \supseteq C$ e $x \in C \Rightarrow f(x) \in B$ restriction $y_0 = f(x_0)$

$$\Rightarrow \stackrel{②}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in C \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon \text{ \& } f(x) \in B$$

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

$$1+2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in C \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon \text{ e } f(x) \in R$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in C \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

ovvero $(g \circ f)(x)$ è continua in x_0 

Esempio

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad A = \mathbb{R} \quad f(A) = [1, +\infty[$$

$$g: B \rightarrow \mathbb{R} \quad g(y) = \log(4 - y) \quad B =]-\infty, 4[\quad g(B) = \mathbb{R}$$

$$f(A) \cap B = [1, +\infty[\cap]-\infty, 4[= [1, 4[$$

$$f^{-1}([1, 4[) =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$$

$$(g \circ f)(x) = \log(4 - x^2 - 1) = \log(3 - x^2)$$

$$g \circ f :]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

Vi conviene però considerare $f \circ g$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad A = \mathbb{R} \quad f(A) = [1, +\infty[$$

$$g: B \rightarrow \mathbb{R} \quad g(y) = \log(4 - y) \quad B =]-\infty, 4[\quad g(B) = \mathbb{R}$$

$$g(B) \cap A = \mathbb{R} \circ \mathbb{R}$$

$$g'(\mathbb{R}) =]-\infty, 4[= \mathbb{C}$$

$$(f \circ g)(x) = 1 + (\log(4-x))^2 = 1 + \log^2(4-x)$$

$$(f \circ g) :]-\infty, 4[\rightarrow \mathbb{R}$$

Problema: Cambio di variabili nei limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x} \stackrel{?}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$$

Vorremmo porre $y = 1 - \cos x$ e osservare che

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

ma questo passaggio non è sempre lecito!

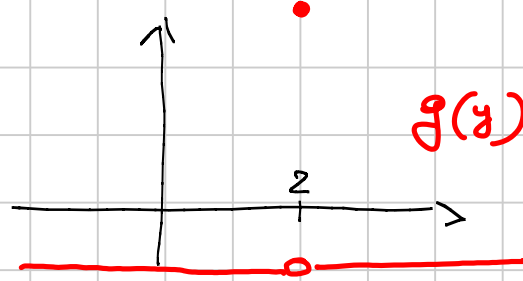
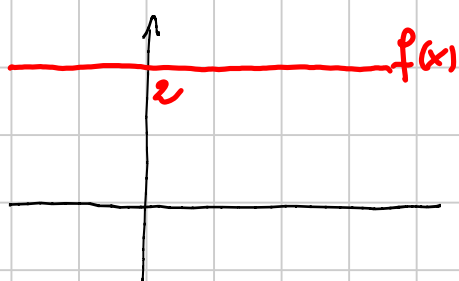
Controesempio

$$f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$g(y) = \begin{cases} -1 & \forall y \neq 2 \\ 3 & y = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$$

$$\text{ma } \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} g(2) = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$$

$$\neq \lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$$



L'origine di questo problema risiede
nel fatto che

- 1) g non è continua in $y=2$
- 2) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad f(x)=2 \quad \forall x \in (\text{dom}(f) \setminus \{x_0\}) \cap W$

Se almeno una di queste proposizioni
è falso, allora potevo fare il cambio
di variabili nel limite

Teorema (Cambiamento di variabile nei limiti)

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \textcircled{1} x_0 \text{ p.d.a. per } f^{-1}(f(A) \cap B) = C$$

$$g: B \rightarrow \mathbb{R} \quad \textcircled{2} y_0 \text{ p.d.a. per } B$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

$$\textcircled{4} \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

Se vale una delle seguenti ipotesi

$$1) \exists W \in \mathcal{I}_{x_0} : f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in (C \setminus \{x_0\}) \cap W$$

$$2) g \text{ continua in } y_0$$

allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

$\swarrow$ qui c'è il cambio
 $y = f(x)$

Dim Non daremo la dimostrazione,

ma cercheremo di capire l'ipotesi $\textcircled{1}$

(nel caso dell'ipotesi $\textcircled{2}$, si vede la

continuità della funzione composta)

Esempio

I polinomi sono funzioni continue

dim

1° caso

$f(x) = x^m$ è continua $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$m=0$ è vero $f(x) = 1$ ed è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$m=1$ " " $f(x) = x$ " " " $\forall x \in \mathbb{R}$

valga per m , ovvero $f(x) = x^m$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
(Hip. induttiva)

$$g(x) = x^{m+1} = x \cdot x^m = h(x) \cdot f(x)$$

$h(x) = x$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$ (caso $m=1$)

$f(x) = x^m$ " " (Hip. induttiva)

$\Rightarrow g = x^{m+1}$
è continua
 $\forall x \in \mathbb{R}$

2° caso

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 0, \dots, m$$

o osservando che $a_i x^i$ è continua in quanto prodotto di
funzioni continue $\forall i = 0, \dots, m$

o osservando che $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ è

continua in quanto somma di funzioni
continue (teorema algebrico sulla somma) $\checkmark$

Funzioni continue su intervalli

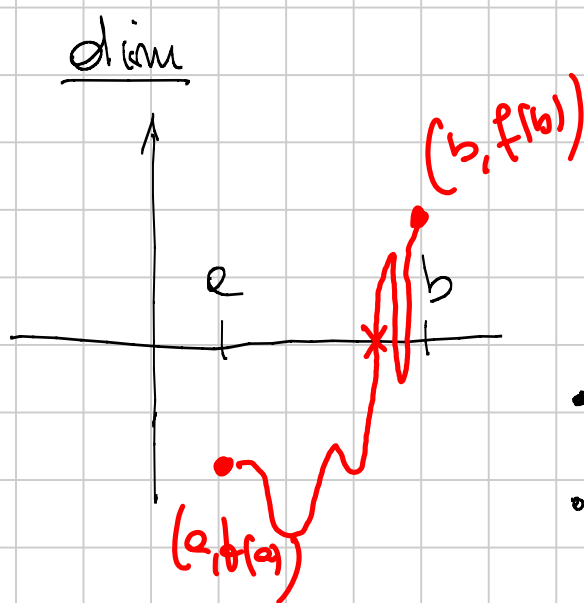
Teorema (Bolzano o di $\exists$ degli zeri)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

1) f continua $\forall x \in [a, b]$

2) $f(a) f(b) < 0$

allora $\exists z \in]a, b[: f(z) = 0$



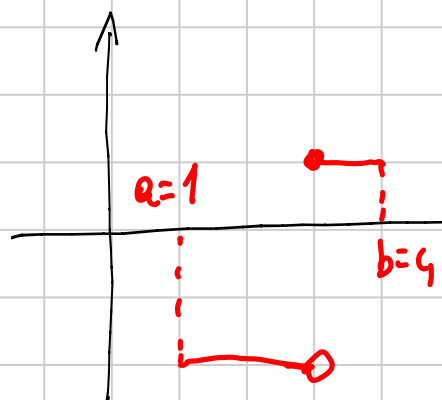
$$f(a)f(b) \neq 0$$

mi dice che

- $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$
- il segno di $f(a)$ è opposto al segno di $f(b)$

Controesempio $\left(\begin{array}{l} f \text{ non continua su } [a, b] \\ f(a) < 0 < f(b) \end{array} \right) \not\Rightarrow \exists z : f(z) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



dim

È essenziale il Teorema Permanenza Segno

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$ e sia

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

$$z = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : z - \varepsilon < \bar{a} \end{cases}$$

$$z \begin{cases} \rightarrow \textcircled{1} & f(z) < 0 \\ \rightarrow \textcircled{2} & f(z) > 0 \\ \rightarrow \textcircled{3} & f(z) = 0 \end{cases}$$

Mostriamo che $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ portano a

contraddizioni $\Rightarrow f(z) = 0$

$f(z) < 0$ Per il Teorema Permanenza Segno

$$\exists V =]z - \delta, z + \delta[\subseteq]z \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \in]z - \delta, z + \delta[\cap [a, b] \quad f(x) < 0$$

In particolare $]z, z + \delta[\subseteq A$ da cui segue

che $z + \frac{\delta}{2} \in A \quad z + \frac{\delta}{2} > z = \sup A$ Assurdo

$f(z) > 0$ Per il Teorema Permanente Segno

$\exists V =]z-\delta, z+\delta[\in \mathcal{I}_z$ t.c.

$\forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap [a, b] \quad f(x) > 0$

In particolare $]z-\delta, z[\cap A = \emptyset$, da

cui segue che $\forall a \in A \quad a \leq z - \delta/2 < z = \sup A$

ASSURDO (z è il minimo dei maggiori m.t. di A)

Ne segue che $f(z) = 0$ 

Domande

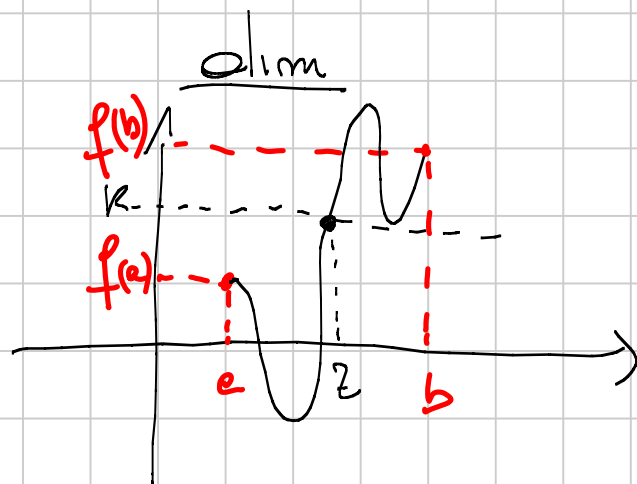
- 1) Come mai $z \in]a, b[$? perché non $z \in [a, b]$?
- 2) Ne esiste uno solo o più di uno? anche ∞ !
- 3) Nelle ipotesi del Teorema ne esistono certamente un numero dispari di zeri per $f(x)$?

Teorema (corollario Teorema di Bolzano)

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua } \forall x \in [a, b]$$

$$\text{con } f(a) < f(b)$$

Se $f(a) < k < f(b)$ allora $\exists z \in]a, b[$ t.c. $f(z) = k$



$$f(a) < k < f(b)$$

ne

$$f(a) - k < 0 < f(b) - k$$

Ponendo $g(x) = f(x) - k$ si ottiene

1) g continua su $[a, b]$ (è differenza tra funzioni continue)

$$2) g(a) = f(a) - k < 0 < f(b) - k = g(b)$$

Allora il Teorema Bolzano applicato a

$g(x)$ mi garantisce l' $\exists z \in]a, b[: g(z) = 0$

ovvero

$$\exists z \in [a, b] : f(z) = k$$



Esempio (Metodo Bisezione)

$$f(x) = x^2 - x \quad \text{Cerchiamo le radici}$$

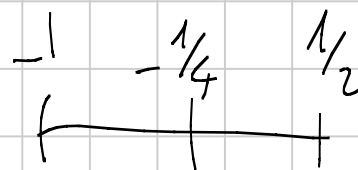
$$\bullet f(-1) = 2 > 0 > f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\bullet f \text{ \u00e9 continue su } \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$\Downarrow$ x Theo Bolzano

$$\exists z : f(z) = 0$$

$$m = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{4}$$



$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16} > 0 > f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$



$$m = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = +\frac{1}{8}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) > 0 > f\left(\frac{1}{8}\right)$$



$$m = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{2} = -\frac{1}{16}$$

$$f\left(-\frac{1}{16}\right) > 0 > f\left(\frac{1}{8}\right)$$

