Lezione n. 20 11 - 18 ottobre 2011

Titolo nota 17/10/2011

Vocabolario:

- Intorno di un punto ($x_0 \in \mathbb{R}$, $+\infty$ e $-\infty$).
- Frontiera di un insieme A ($\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\complement A)$).

- A Insieme chiuso se $\mathcal{F}(A) \subseteq A$
- A Insieme aperto se $\mathcal{F}(A) \subseteq \complement A$ (ovvero se $\complement A$ è chiuso)
- $\overline{A} \equiv$ chiusura di $A \equiv A \cup \mathcal{F}(A)$ ($\overline{A}$ è chiuso!)
- $\mathring{A} =$ interno di $A = A \setminus \mathcal{F}(A)$ ($\mathring{A}$ è aperto)
- $\forall A \quad \mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ (perché?) !!!
- ϕ è sia aperto che chiuso (perché?) !!
- $\mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso (perché?) !!

<u>Def</u> (FONDAMENTALE: punto di accumulazione)

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto "punto di accumulazione per A" se

$$\forall U \in \mathcal{I}_{x_0} \quad U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \phi$$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, allora $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ $\#(U \cap (A \setminus \{x_0\})) = \infty$

dim

x_0 è di accumulazione per A
allora fissato $\delta_1 = 1$ $\quad \exists\, x_1 \in]x_0 - 1, x_0 + 1[\cap (A \setminus \{x_0\})$

Prendo ora $\delta_2 = \dfrac{|x_0 - x_1|}{2}$

Certamente $\quad x_1 \notin]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\cap (A \setminus \{x_0\})$

ma essendo x_0 di accumulazione

$$\exists\, x_2 \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\cap (A \setminus \{x_0\})$$

Hip induttiva Supponiamo di aver trovato

$x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \dots \neq x_n$
con $\{x_1, \dots, x_n\} \in A \setminus \{x_0\}$

e supponiamo che $\quad |x_0 - x_n| < |x_0 - x_{n-1}| < \dots < |x_0 - x_1|$

Th Devo provare che $\exists\, x_{n+1} \neq x_i \quad i = 1 \dots n$

$$x_{n+1} \in A \setminus \{x_0\}$$

A tal fine poniamo $\delta_{n+1} = \dfrac{|x_0 - x_n|}{2}$

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cap]x_0 - \delta_{n+1}, x_0 + \delta_{n+1}[\cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

ma x_0 è di accumulazione, e perciò

$$\exists\, x_{n+1} \in \left]x_0-\delta_{n+1}, x_0+\delta_{n+1}\right[\cap (A \setminus \{x_0\})$$

che è la nostra Tesi ⚡

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo $D(A) \equiv$ derivato di A
$\equiv \{$pti di accumulazione x $A\}$

dunque $D(A)$ è l'insieme dei punti di accumulazione

Esercizio (Teorico)

$$A \cup D(A) = \overline{A}$$

Osservazione

$$\overline{A} \equiv \underbrace{D(A)}_{\text{punti di accumulazione}} \cup \underbrace{I(A)}_{\text{punti isolati}}$$

Oss $x_0 \in I(A)$, ovvero isolato $\Longrightarrow x_0 \in A$

$x_0 \in D(A)$, ovvero di accumulazione $\Longrightarrow$ NON è detto che $x_0 \in A$

(può $\in A$
" $\notin A$)

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ Un punto $x_0 \in A$ è detto "isolato per A" se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0} : U \cap A = \{x_0\}$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$

$\forall x_0 \in \mathring{A}$, x_0 è di accumulazione

dim

$\forall x_0 \in \mathring{A}$

$\exists \delta \ \exists\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \subseteq A$

$x_0 \in \mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A)$

$x_0 \in \mathcal{F}(A)$ se $\forall \delta > 0$ $\quad]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \cap A \neq \emptyset$

$\quad$ " $\quad \cap\, \complement A \neq \emptyset$

$x_0 \notin \mathcal{F}(A)$ se $\exists \delta > 0 :$

- $x_0 \in A \quad]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \cap\, \complement A = \emptyset$
- $x_0 \notin A \quad]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \cap A = \emptyset$

Dunque

$x_0 \in A \setminus \mathcal{F}(A)$ se $\exists \delta > 0 : \ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \subset A$

Dunque

$x_0 \in \mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) \Rightarrow x_0$ è di accumulazione

Oss (Conseguenza thm precedente)

A aperto (ovvero $A = \mathring{A}$) $\Longrightarrow \forall x_0 \in A$ x_0 è di accumulazione

Esempio

$A =]2,3] \cup \{4\}$

$\mathcal{F}(A) = \{2,3,4\}$

$\overline{A} = [2,3] \cup \{4\}$

$\mathring{A} =]2,3[$

$D(A) = [2,3]$

Proviamo $D(A) = [2,3]$

Essendo $\mathring{A} =]2,3[$, si ha $]2,3[\subseteq D(A)$

Inoltre 2 è di accumulazione

- $\forall \delta > 0$, $]2-\delta, 2+\delta[\cap]2,3] \neq \emptyset$

  infatti $\min\{2+\frac{\delta}{2}, \frac{5}{2}\} \in]2-\delta, 2+\delta[\cap]2,3]$

Inoltre 3 è di accumulazione

- $\forall \delta > 0$ $]3-\delta, 3+\delta[\cap]2,3[\neq \emptyset$

  $\max\{3-\frac{\delta}{2}, \frac{5}{2}\} \in]3-\delta, 3+\delta[\cap]2,3[$

Continuità

Def $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione, questa si dice "continua nel punto x_0" se

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} \quad : \quad f(V \cap A) \subset U}$$

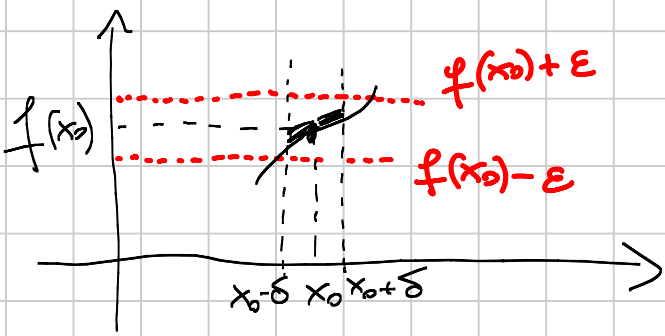
$$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

Se prendo $U =]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$ $\quad V =]x_0-\delta, x_0+\delta[$

la definizione diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta[$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$



ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$\{(x, f(x)) : x_0-\delta < x < x_0+\delta\} \subseteq]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$$

Stiamo dicendo che il grafico della funzione $f\big|_{]x_0-\delta,\, x_0+\delta[}$ sta nel rettangolo

$$]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\times\,]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$$

Esempio (di funzione continua)

$f(x) = 2x+1$ è continua in $x_0 = 0$

dim

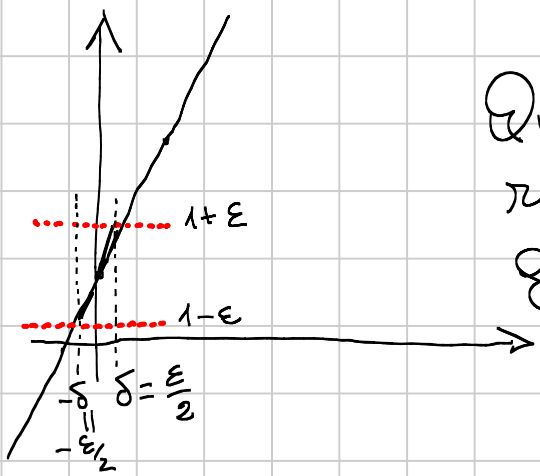
Bisogna provare che ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\ |x|<\delta \Rightarrow |\overset{(2x+1)}{f(x)}-1| < \varepsilon$$

$$\text{"} \quad \text{"} : |x|<\delta \Rightarrow |2x| < \varepsilon$$

È sufficiente prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$: infatti

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\ |x| < \delta \Rightarrow |2x| = 2|x| < 2\cdot\delta = \varepsilon$$



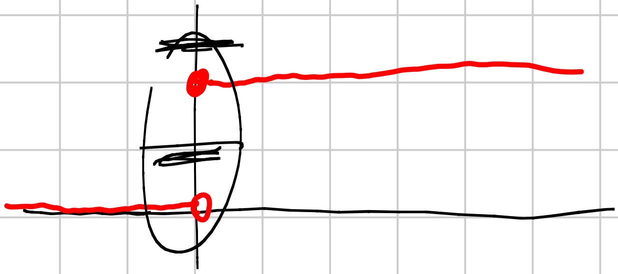
Questa è la rappresentazione grafica!

Esempio (funzione non continua)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

non è continua in $x_0=0$

dim



$A=\mathbb{R}$

f continua in $x_0=0$ significa

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x \quad |x|<\delta \Rightarrow |f(x)-\overset{f(0)}{1}|<\varepsilon$$

f non è continua in $x_0=0$ significa

$$\text{non}\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x \quad \underbrace{|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-\overset{f(0)}{1}|<\varepsilon}\right)$$

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0 \quad \exists x_\delta : \ |x_\delta|<\delta \text{ e } |f(x_\delta)-1|\geq\varepsilon_0$$

$$\text{non}(A\Rightarrow B) = A \text{ e } (\text{non} B)$$

Ho preso $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$

$$\varepsilon_0=\tfrac{1}{2}\quad \forall\delta>0\ \exists x_\delta=-\tfrac{\delta}{2} \quad \left|-\tfrac{\delta}{2}\right|<\delta \text{ e } \left|f\left(-\tfrac{\delta}{2}\right)-1\right| = |-1| = 1 > \tfrac{1}{2} \ ↯$$

Oss: la funzione vista prima (detta f.ne di Heaviside) è continua $\forall x \neq 0$: infatti è formata da due tratti costanti.

Esercizio

$f(x) = k$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ (k è una costante)

dim

$\nexists$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall x$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\quad \shortparallel \qquad \shortparallel \qquad \forall x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\text{cost} - \text{cost}|$

$$= 0 < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon$ prendo δ a piacere, ad esempio $\delta = \pi$

$\lightning$

Esercizio

$f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua in $x_0 = 0$

dim

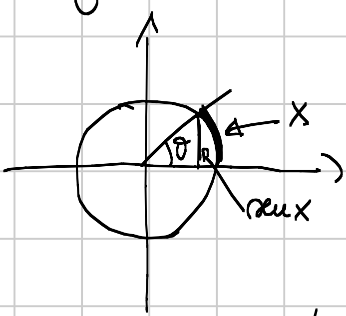
$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f: \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \quad |x| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \overset{0}{0}| < \varepsilon$$

preso $\delta = \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : \forall x \quad |x| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

Gli angoli si misurano in radianti



$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|$$

Ricordiamo ora le formule di prostaferesi (trasformano somme in prodotti)

- $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x - x_0}{2} \cos \dfrac{x + x_0}{2}$

- $\cos x - \cos x_0 = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x + x_0}{2}$

e la disuguaglianza

- $|\operatorname{sen} x| \leq |x| \Leftrightarrow |\operatorname{sen}(x - x_0)| \leq |x - x_0|$

Esercizio

① $f(x) = \operatorname{sen} x$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = \cos x$ " "

dim

①

fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ generico

$\exists \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathbb{R} \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon$

prostaferesi

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \overset{\downarrow}{=} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|$$

$$= 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1$$

$$= |x - x_0|$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon > 0 : \forall x \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

② $f(x) = \cos x$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$

fisso $x_0 \in \mathbb{R}$

Sd $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|$$

$$= 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right|}$$

$$\leq 2 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1$$

$$= |x - x_0|$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Oss la definizione di continuità va bene per i punti $x_0 \in A$

- di accumulazione per A
- isolati per A

Continuità nei punti isolati

È banale: se $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ è isolato

allora f continua in x_0

Importante $\forall f: A \to \mathbb{R}$, se $x_0 \in A$ è isolato per A allora f è continua in x_0

dim

TS $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ma x_0 è isolato per A, ovvero esiste $\bar{\delta}$: $]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[\cap A \equiv \{x_0\}$

ma allora, prendendo $\delta \leq \bar{\delta}$, si ha che

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \underline{\underline{\{x_0\}}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \leq \bar{\delta}$: $\forall x \in A \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

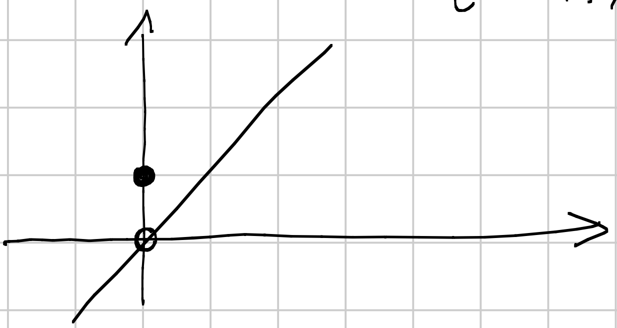
x_0 $\Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

Oss

$$\boxed{\text{Dunque gli unici punti meritevoli di interesse sono i punti di accumulazione}}$$

Il limite di una funzione

Sia data $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x & x\neq 0\end{cases}$



Questa funzione è chiaramente discontinua in $x_0=0$

Però osserviamo che se si escludesse x_0 dal test di continuità, avremmo

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\ \ 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \Rightarrow |x|<\varepsilon$$

ed è sufficiente prendere $\delta=\varepsilon$

Ovvero la funzione ha "ricostruito" il suo valore in x_0 quando x si approssima a x_0 senza toccarlo. È necessario però che x_0 sia di accumulazione, altrimenti non riesco a fare il test.

Andiamo alla def. di limite

Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A

diciamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (limite per x che tende a x_0 uguale a l) con $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$

se

nella continuità $l = f(x_0)$

nella continuità tolgo in x_0

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \ \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : f(V \cap (A \setminus \{x_0\})) \subseteq U$$

- $x_0 \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $\quad$ $l \in \mathbb{R}$ $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

- $x_0 = +\infty$ $l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall x \in A \ x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$x_0 = +\infty$ $]N, +\infty[$ $\quad$ $l \in \mathbb{R}$ $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $l = -\infty$

$\forall N < 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$l = -\infty$ $]-\infty, N[$

Oss: • $0 < |x - x_0|$ in quanto $x \neq x_0$

• x_0 di accumulazione per A

f continua in x_0 <u>se</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Adesso va introdotta l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$

$c \in \mathbb{R}$ $\quad c + \infty = +\infty \quad c - \infty = -\infty$

$$c > 0 \quad \begin{cases} c \cdot (+\infty) = +\infty & c \cdot (-\infty) = -\infty \\ \dfrac{+\infty}{c} = +\infty & \dfrac{-\infty}{c} = -\infty \\ \dfrac{c}{+\infty} = 0^+ & \dfrac{c}{-\infty} = 0^- \end{cases}$$

$$c < 0 \quad \begin{cases} c \cdot (+\infty) = -\infty & c \cdot (-\infty) = -\infty \\ \dfrac{+\infty}{c} = -\infty & \dfrac{-\infty}{c} = +\infty \\ \dfrac{c}{+\infty} = 0^- & \dfrac{c}{-\infty} = 0^+ \end{cases}$$

$c > 0 \quad \dfrac{c}{0^+} = +\infty \quad \dfrac{c}{0^-} = -\infty$ (in generale $\dfrac{c}{0} = \infty$ (se non distinguo))

$c < 0 \quad \dfrac{c}{0^+} = -\infty \quad \dfrac{c}{0^-} = +\infty$ (//)

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \, (-\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$e^{0 \cdot \log \infty}$

Forme indeterminate:

$+\infty - \infty \; ; \; \infty \cdot 0 \; ; \; \dfrac{\infty}{\infty} \; ; \; \dfrac{0}{0} \; ; \; 1^{\infty} \; ; \; \infty^0$