Lezione nro 10 - 17 ottobre 2011

Titolo nota 13/10/2011

$$\#A = n \Rightarrow \#\mathbb{P}(A) = 2^n$$

$n=0$ è vero

Suppongo che se $\#A = n$ allora $\#\mathbb{P}(A) = 2^n$

$\overline{S}$ se $\#A = n+1$ allora $\#\mathbb{P}(A) = 2^{n+1}$ ←

$$A = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}$$

$$= B \cup \{x_{n+1}\}$$

$\#B = n$ quindi su B vale l'ip. induttiva

Devo contare i sottoinsiemi di $A = B \cup \{x_{n+1}\}$

$C \subseteq A$

- 1ª eventualità $\quad x_{n+1} \in C$
- 2ª $\quad$ " $\quad x_{n+1} \notin C$

Se vale la 1ª event. allora $C = D \cup \{x_{n+1}\}$

con $D \subseteq B$ ma i sottoinsiemi di B sono 2^n

allora questi insiemi C sono 2^n

Se invece vale la 2^a eventualità $(x_{n+1} \notin C)$

allora $C \subseteq B$ e di questi ce

ne sono 2^n

in def. 1^a ev. + 2^a ev. $\exists\, 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ↯

Def. (Probabilità finita)

$$\text{Probabilità di un evento} \equiv \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}$$

Esempio

Sul tavolo ci sono 5 banconote

1 da 10 €
1 da 20 €
1 da 50 €
1 da 100 €
1 da 200 €

Prendendo 2 banconote con gli occhi chiusi, quale probabilità ho di avere un importo maggiore di 120 €?

dim

Casi possibili : $\binom{5}{2} = 10$ ← sono i sottoinsiemi di 2 el.ti da un insieme di 5 el.ti

Casi favorevoli:
- 200 € + 1 altro $\equiv 4$
- 100 € + 50 € $\equiv 1$

dunque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

200+100 ; 200+50 ; 200+20 ; 200+10 — 4 casi

100+50 — 1 caso

Esercizio

Lanciando 2 dadi, quale è la probabilità di ottenere un numero pari?

R: 0,5

dim

Lanciando due dadi si ottiene

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 modo	2 modi	3 modi	4 modi	5	6 modi	5 modi	4 modi	3	2	1

$2 \to 1+1$

$3 \to 1+2$, $2+1$

$4 \to 1+3$, $2+2$, $3+1$

$5 \to 1+4$, $2+3$, $3+2$, $4+1$

$6 \to 1+5$, $2+4$, $3+3$, $4+2$, $5+1$

$7 \to \left.\begin{array}{l} 1+6 \\ 2+5 \\ 3+4 \\ 4+3 \\ 5+2 \\ 6+1 \end{array}\right\}$ 6 volte

etc

36 casi possibili
18 " favorevoli

$$\frac{18}{36} = 0,5$$

Problema: lanciando 2 dadi, quale è la probabilità che esca il n.ro 7?

$$\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Problema Lanciando 3 dadi, quale è il numero che ha maggiore probabilità di uscire?

n.ro minimo = 3 n.ro max = 18

$$\frac{3+18}{2} = 10,5$$

dunque la risposta è il n.ro 10 e 11

$$\overbrace{3 \quad 4 \quad 5 \; 6 \; 7 \; 8 \; 9 \; 10}^{8} \quad \underbrace{11 \; 12 \; 13 \; 14 \; 15 \; 16 \; 17 \; 18}_{8}$$

3 ← 1 modo
4 ← 3 modi

In quanti modi esce il 10?

136	226	316	415	514	613
145	235	325	424	523	622
154	244	334	433	532	631
163	253	343	442	541	
	262	352	451		
		361			

27 modi

e l'11

146	236	326	416	515	614
155	245	335	425	524	623
164	254	344	434	533	632
	263	353	443	542	641
		362	452	551	
			461		

27 modi

e quindi sono equiprobabili!!!

I possibili lanci sono

$$6 \times 6 \times 6 = 246$$

(nel caso di 2 dadi erano $6 \times 6 = 36$)

Esercizio Quale è la probabilità di fare 6 al Superenalotto.

dim. ho i numeri da 1 a 90

90 89 88 87 86 85

ovvero $$P = \frac{6!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85} = \frac{1}{\binom{90}{6}}$$

ovvero $$P \sim \frac{6!}{4{,}48 \cdot 10^{11}} = \frac{720}{4{,}48 \cdot 10^{11}} \sim \frac{2 \cdot 10^{2}}{10^{11}} \sim \frac{1}{5 \cdot 10^{8}}$$

Per capire quanto sia piccola questa probabilità, si osservi che la probabilità di ottenere il premio nobel per la fisica è

$$P = \frac{1}{\text{popolazione mondiale}} \sim \frac{1}{5 \cdot 10^{9}} =$$

ovvero 100 volte più probabile.

Esercizio

In quanti modi posso disporre $n+2$ palline

- n nere
- 2 rosse

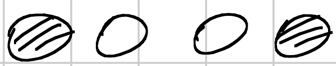
in modo che la prima e l'ultima siano nere

dim

$n = \emptyset$ non ho soluz.

$n = 1$ " " "

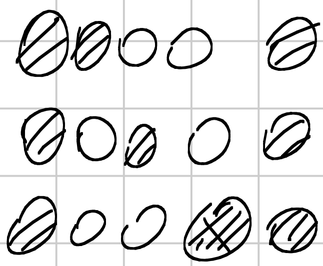
$n = 2 \rightarrow$ 2 palline nere
2 " rosse



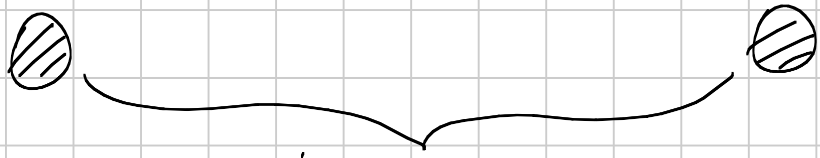
1 solo modo

$n = 3 \rightarrow$ 3 palline nere
2 palline rosse

$\xrightarrow[\text{una pallina nera}]{\text{aggiungo}}$



3 modi ok



$(n-2)$ palline nere
2 " rosse } n palline

n oggetti li posso disporre in $n!$ disp. $\neq$
(permutazioni)

non posso distinguere tra le 2 palline rosse

$\Longrightarrow$ devo dividere per $2!$

non posso distinguere tra le $(n-2)$ palline nere

$\Longrightarrow$ devo dividere per $(n-2)!$

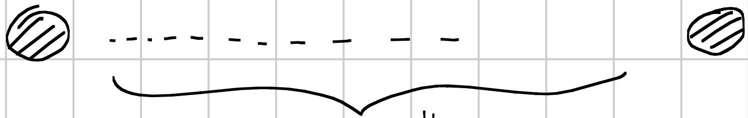
$$\Longrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\;2!} = \binom{n}{2}$$

$n=2 \longrightarrow 1$

$n=3 \longrightarrow \binom{3}{2} = 3$

$n=4 \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2\cdot 2} = 6$

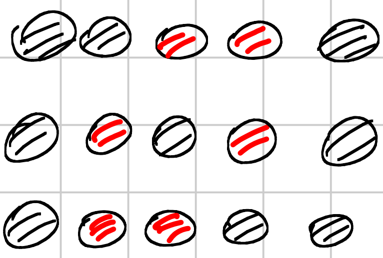
$n=5 \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$



n palline

x capire è utile iniziare con

$n=2$ palline nere $\longrightarrow$ 1 solo modo 

$n=3$ palline nere $\longrightarrow$  3 modi

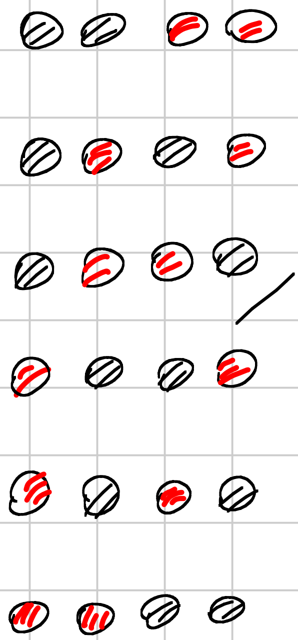
$n=4$ palline nere $\longrightarrow$ dobbiamo disporre

2 nere

2 rosse

$$\binom{n-2}{2}=\binom{4}{2}=6$$

6 modi



$n = 5 \rightarrow$ devo disporre 3 palline nere + 2 palline rosse

(disposizioni)

Le permutazioni di 5 palline sono 5!

ma non distinguo tra le 2 palline rosse $\Rightarrow$ moltiplico per $1/2!$

ma non distinguo tra le 3 palline nere $\Rightarrow$ moltiplico per $1/3!$

$$\Rightarrow \frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2}$$

Analogamente

n palline nere

2 " rosse

1^a e $(n+2)^e$ palline nere

$\Bigg\} \rightarrow$ Devo disporre $(n-2)+2 = n$ palline

e dunque

$$\frac{\overbrace{n!}^{\text{permut. di } n \text{ palle}}}{\underbrace{2!}_{\text{2 palline rosse indist.}}\;\underbrace{(n-2)!}_{n-2 \text{ palle rosse indistinguibili}}} = \binom{n}{2}$$

Esercizio Dato un numero di 4 cifre

1) quanti sono quelli che hanno le cifre disposte in ordine crescente?

dim

~~2 3 5 1~~ non va bene

$5 > 4 > 3 > 2$ va bene

Se un numero ha tutte le cifre in ordine strett. crescente allora ha tutte le cifre $\neq$ tra loro

ovvero ~~3 2 2 1~~ non è accettabile

Quindi, per un $\forall$ sottoinsieme $\{a, b, c, d\} \subseteq \{0, 1 \dots 9\}$

$\{a, b, c, d\} \longleftrightarrow$ numero formato dalle cifre a, b, c e d poste in ordine crescente

Dunque la risposta è $\binom{10}{4}$

Topologia

$A \subseteq \mathbb{R}$ si introduce $\complement A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Def. (Intorno di un punto)

insieme di tutti gli intorni di x_0

$x_0 \in \mathbb{R}$ — $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x_0, ovvero $A \in \mathcal{I}_{x_0}$,

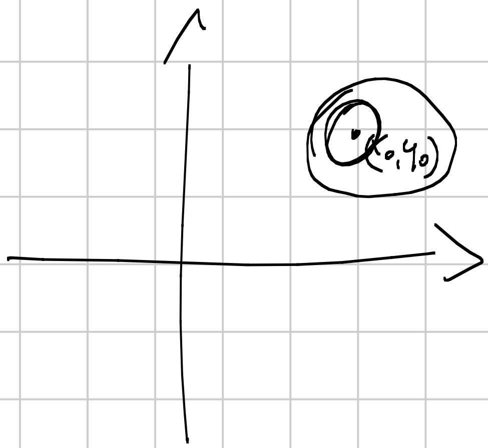
se $\exists\, \delta > 0 : \;]x_0-\delta, x_0+\delta[\; \subseteq A$

$\underline{x_0 = +\infty}$ — $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $+\infty$, ovvero $A \in \mathcal{I}_{+\infty}$

se $\exists\, M \in \mathbb{R} : \; \underline{]M, +\infty[} \subseteq A$ (intorni sinistri)

$x_0 = -\infty$ — $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $-\infty$, ovvero $A \in \mathcal{I}_{-\infty}$

se $\exists\, N \in M \;]-\infty, N[\; \subseteq A$ (intorni destri)



Dire che un punto $x \in A$ con A intorno di x_0 significa "grosso modo" dire che x è "vicino" a x_0

Oss Di fatto, per $+\infty$ esistono solo "intorni sinistri"

per $-\infty$ " " "intorni destri"

Analogamente posso definire

Intorno sinistro di $x_0 \in \mathbb{R}$: per esempio $]x_0-\delta, x_0[$

Intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$: per esempio $]x_0, x_0+\delta[$

Esempio

$x_0 = 1$ allora $]1-1/10, 1+1/10[\in \mathcal{I}_1$

allora $]0, 3[\in \mathcal{I}_1$

allora $]0, 1[\notin \mathcal{I}_1$

($]0,1[$ è un intorno sinistro di 1)

allora $]1, 2[\notin \mathcal{I}_1$

($]1,2[$ è un intorno destro di 1)

$x_0 = +\infty$ allora $]3, +\infty[\in \mathcal{I}_{+\infty}$

allora $]-5, +\infty[\in \mathcal{I}_{+\infty}$

allora $]-5, 10^{10^{10}}[\notin \mathcal{I}_{+\infty}$

$x_0 = -\infty$ allora $]-\infty, 3[\in I_{+\infty}$

allora $]-\infty, -10^{10^{10}}[\in I_{-\infty}$

allora $]-10^{10^{10}}, 3000[\notin I_{-\infty}$

Aperto

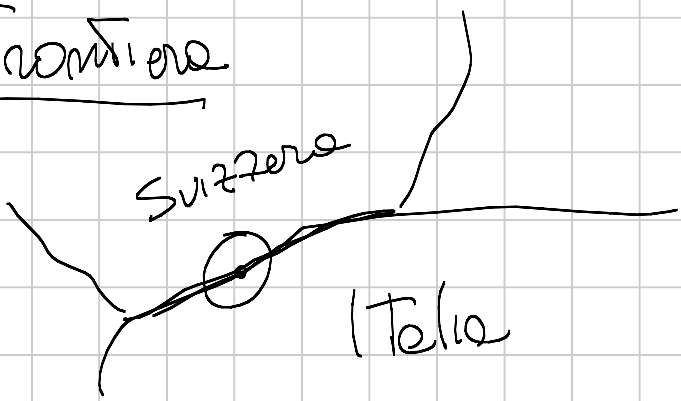
Chiuso

Frontiera

Punto accumulazione

Punto isolato

Frontiera



Def (Frontiera di A)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto

"punto di frontiera di A"

se $\underbrace{\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}}$ $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap \complement A \neq \emptyset$

$\mathcal{F}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ di frontiera per } A\}$

Esempio $A = \{1, 2, 3\} \cup \,]5,6[$

$\complement A = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]1,2[\, \cup \,]2,3[\, \cup \,]3,5] \cup [6,+\infty[$

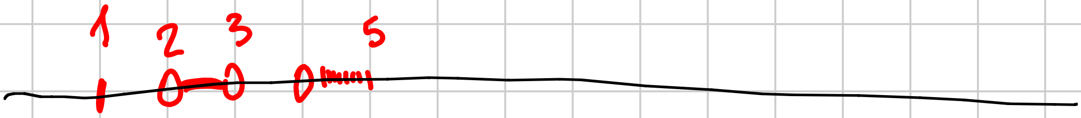
$\mathcal{F}(A) = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6\} \not\subseteq A$

$\not\subseteq \complement A$

Oss $x \in \mathcal{F}(A)$ **sse** $x \in \mathcal{F}(\complement A)$

Esempio $A = \{1\} \cup]2,3[\cup \underline{\{4+\frac{1}{n} : n \geq 1\}}$

In questo caso $\mathcal{F}(A) = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4+\frac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{4\}$



$\underline{1 \in \mathcal{F}(A)}$ prendo $]1-\delta, 1+\delta[\in \mathcal{I}_1 \quad \forall \delta$

- $1 \in]1-\delta, 1+\delta[\Rightarrow]1-\delta, 1+\delta[\cap A \neq \emptyset$
- $1-\frac{\delta}{2} \in]1-\delta, 1+\delta[\Rightarrow]1-\delta, 1+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

$2 \in \mathcal{F}(A)$ prendo $]2-\delta, 2+\delta[\in \mathcal{I}_2 \quad \forall \delta \in]0,1[$

se funziona per δ piccolo

allora ancora meglio per δ grande

- $2 \in]2-\delta, 2+\delta[\Rightarrow]2-\delta, 2+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$
- $2+\frac{\delta}{2} \in]2-\delta, 2+\delta[\Rightarrow]2-\delta, 2+\delta[\cap A \neq \emptyset$

...

$4 \in \mathcal{F}(A)$ $\quad 4 \in]4-\delta, 4+\delta[\Rightarrow]4-\delta, 4+\delta[\cap \complement A \neq \emptyset$

$\forall \delta \ \exists \ \frac{1}{n} < \delta : \ 4+\frac{1}{n} \in]4-\delta, 4+\delta[\Rightarrow]4-\delta, 4+\delta[\cap A \neq \emptyset$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto "chiuso" (insieme chiuso) se $\underline{\mathcal{F}(A) \subseteq A}$

Def Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo "chiusura di A" l'insieme $\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A)$

Esempio $A = \{1, 2\} \cup]3, 4] \cup \{5 + 1/n \quad n \geq 1\}$

- $\mathcal{F}(A) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} \cup \{5 + 1/n \quad n \geq 1\}$
- A non è chiuso poiché $3 \in \mathcal{F}(A)$ ma $3 \notin A$
- $\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A)$

  $\overset{!}{=} \{1, 2\} \cup [3, 4] \cup \{5\} \cup \{5 + 1/n : n \geq 1\}$

Oss La chiusura è il più piccolo insieme chiuso che contiene A (si potrebbe dimostrare)

Esempio $A = \{1, 3\} \cup [4, 5]$

- $\mathcal{F}(A) = \{1, 3, 4, 5\}$
- A è chiuso poiché $\mathcal{F}(A) \subset A$
- $\overline{A} = A$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ viene detto "aperto" se $\complement A$ è chiuso

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo "interno di A" l'insieme $A \setminus \mathcal{F}(A) = \mathring{A}$

Oss $\mathring{A}$ è un insieme aperto (il più grande aperto $\subseteq A$)

Oss esistono insieme in $\mathbb{R}$ che
- non sono aperti
- non sono chiusi

infatti, preso $A =]0,1]$ $\quad \complement A =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

$\mathcal{F}(A) = \{0, 1\}$

- $\mathcal{F}(A) \nsubseteq A \Rightarrow A$ non è chiuso
- $\mathcal{F}(A) \nsubseteq \complement A \Rightarrow \complement A$ non è chiuso $\Rightarrow A$ non è aperto

<u>Esempio</u> $A = \{1\} \cup]2,3[\cup]3,4]$

$\mathcal{F}(A) = \{1,2,3,4\}$ $\quad\quad$ $\complement A =]-\infty, 1[\cup]1,2] \cup \{3\} \cup]4,+\infty[$

- A non è chiuso $\quad 3 \in \mathcal{F}(A) \quad 3 \notin A$
- A non è aperto $\quad 4 \in \mathcal{F}(\complement A) \quad 4 \notin \complement A$

- $\overline{A} = \{1\} \cup [2,3] \cup [3,4] = \{1\} \cup [2,4]$
- $\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) =]2,3[\cup]3,4[$

<u>Def</u> (FONDAMENTALE: punto di accumulazione)

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto "punto di accumulazione per A" se

$$\forall U \in \mathcal{I}_{x_0} \quad U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

<u>Oss</u> Un punto di accumulazione può $\in A$ come può $\notin A$

Esempio $A = \{1\} \cup \{3 + 1/n : n \geq 1\}$

$\mathcal{I}(A) = \{1\} \cup \{3\} \cup \{3 + 1/n : n \geq 1\}$

- $\{1\}$ non è di accumulazione

  infatti $\exists \,]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[\, \in \mathcal{I}_1$

  $]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[\, \cap (A \setminus \{1\}) = \emptyset$

- $\{3 + 1/n\}$ non è di accumulaz. $\forall n$

- 3 è di accumulazione

  $\forall \delta > 0 \quad]3-\delta, 3+\delta[\, \cap (A \setminus \{3\})$
  $= \,]3-\delta, 3+\delta[\, \cap A \neq \emptyset$

  poiché $\forall \delta > 0 \quad \exists \bar{n} : \frac{1}{\bar{n}} < \delta$

  $\quad$ " $\quad$ " $\quad : 3 + \frac{1}{\bar{n}} < 3 + \delta$