Lezione nro 8

Titolo nota 10/10/2011

$\mathbb{N}$ è definito a partire dagli assiomi

1) 0 è un numero (ovvero $0 \in \mathbb{N}$)

2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$ (il successore di ogni numero è un numero)

3) $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m \Rightarrow n+1 \neq m+1$ (numeri diversi hanno diversi successori)

4) Principio di induzione

$$\left.\begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{N} \\ - 0 \in S \\ - n \in S \Rightarrow (n+1) \in S \end{array}\right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Oss Variante principio induzione

$$\left.\begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{N} \\ - n_0 \in S \\ - \overline{n} \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow S = [n_0, +\infty[\cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$$

Principio del minimo intero (Assioma)

Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m = \min A$

Oss Quest'ultimo è detto anche principio del buon ordinamento

Teorema

Principio minimo intero $\Rightarrow$ Principio di induzione

dim

x assurdo Non vale principio di induzione

$\exists S \subseteq \mathbb{N}$ $0 \in S$, $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$ però $S \neq \mathbb{N}$

$\Rightarrow A = \mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$ e $A \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \overline{m} = \min A$ (Per ipotesi) $\overline{m} \in A$

$0 \in S$ dunque $0 \notin A$

dunque $\bar{m} > 0$

dunque $\bar{m} - 1 \in S$

Però se $(\bar{m} - 1) \in S$ allora $\bar{m} \in S$

ASSURDO $\Rightarrow S \equiv \mathbb{N}$ ↯

Analogamente si dimostra che

Teorema

Principio di induzione $\Rightarrow$ Principio del minimo intero

dim

A ha 1 elemento

$A \subseteq \mathbb{N}$ con $\#A = 1$ allora la Tesi è vera

Supponiamo che per $\#A = n$ la Tesi sia vera

Prendiamo ora A t.c. $\#A = n+1$

in tal caso $A = B \cup \{x_{n+1}\}$

$B = \{x_1, \dots, x_n\}$

ove $\#B = n$

Per ipotesi induttiva esiste $\bar{m} = \min B$

e dunque esiste

$$\min A = \min(B \cup \{x_{n+1}\})$$

min su un insieme di n elementi

$$= \min\{\min B ; x_{n+1}\}$$

$$= \min\{\bar{m}, x_{n+1}\}$$

minimo su un insieme di 2 elementi

(~~Teorema~~) Osservazione

Sia dato $A \subseteq \mathbb{R}$, e si consideri una funzione $f: A \to A$ ed $a \in A$

Allora risulta ben definita $g: \mathbb{N} \to A$

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f(g(n)) \end{cases}$$

$g(0) = a$

$g_1 = f(g(0)) = f(a)$

$g_2 = f(g(1)) = f(f(g(0)))$

dim

$g(0) = a$ è ben definita

$g(1) = f(g(0)) = f(a)$ è ben definita

Hp induttiva $\exists\, g(n) \in A$ vero per n

$g(n+1) = f(g(n))$ è ben definita in quanto $g(n) \in A$ ↯

Esercizio

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{?}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \overset{?}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{?}{=}$$

Calcoliamo $\sum_{k=1}^{n} k$

$$(k+1)^2 - k^2 = \cancel{k^2} + 2k + 1 - \cancel{k^2} = 2k+1$$

$$(\cancel{1+1})^2 - 1^2 = 2\cdot 1 + 1$$

$$(\cancel{2+1})^2 - \cancel{2^2} = 2\cdot 2 + 1$$

$$(3+1)^2 - \cancel{3^2} = 2\cdot 3 + 1$$

$$\dots$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2\cdot n + 1$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2\cdot(1+2+\dots+n) + \overbrace{(1+\dots+1)}^{n \text{ volte}}$$

$$n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} = 2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + n$$

$$n^2 + n = 2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right]$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$$

N.B. Questo risultato era stato calcolato in altro modo!

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} = 3k^2 + 3k + 1$$

$$\cancel{(1+1)^3} - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$(2+\cancel{1)^3} - \cancel{2^3} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$(3+1)^3 - \cancel{3^3} = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$- - - -$$

$$(n+1)^3 - \cancel{n^3} = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\frac{n^2+n}{2}\right] + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}(n^2+n) - n\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n\right]$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

Calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^3$

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = 4\left[\sum_{k=1}^{n} k^3\right] + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$(n+1)^4 - 1^4 = \;----\qquad \text{etc}$$

e si trova

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

<u>x casa</u> Dimostrare che (x induzione)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Esercizio

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \overset{?}{=} \left(f(n)\right)$$

$n=2 \quad 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$n=3 \quad \frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{1}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3}$

$n=4 \quad \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{16}_{8}} = \frac{5}{8}$

$n=5 \quad \frac{5}{8}\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{25}_{5}} = 3/5$

$n=6 \quad \frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{36}_{12}}=\frac{7}{12}$

$n=7 \quad \frac{7}{12}\left(1-\frac{1}{49}\right)=\frac{\cancel{7}}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{48}^{4}}{\cancel{49}_{7}}=\frac{4}{7}$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{4}{7} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 2 & & 4 & & 6 & \end{array}$$

n pari $\quad \frac{n+1}{2n}$

n dispari $\quad \frac{\frac{n+1}{2}}{n}=\frac{n+1}{2n}$

$f(n)=\frac{n+1}{2n}$

$n=2$ funziona

suppongo che valga per n $\quad \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

proviamo per $n+1$

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \overset{f(n+1)}{\shortparallel}$

$=\frac{\cancel{n+1}}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^{\cancel{2}}}=\frac{n^2+2n}{2n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{\cancel{n}(n+2)}{2\cancel{n}(n+1)}$ ✓

Definizione matematica di "cretino" tratta da C. M. Cipolla: "Allegro ma non troppo"

Ogni nostra azione comporta effetti su noi/altri

(Bene/Male per noi, Bene/Male per altri)

Bene per altri

INGENUI

questa azione genera (Male x sé, Bene x altri)

questa azione genera (Bene x sé, Bene per Altri)

INTELLIGENTI

Male per sé

BANDITI

Bene per sé

CRETINI

questa azione genera (Bene per sé, Male per altri)

Questa azione genera (Male x sé, Male x altri)

Male per altri

Genere umano si suddivide in 4 classi

[Intelligenti], [Ingenui], [Banditi], [CRETINI]

Allo stesso modo costruisco $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ " " " $\mathbb{Z}$

$-1 \longleftrightarrow [(n, n+1)]$

$1 \longleftrightarrow [(n+1, n)]$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \; = \{ \underset{\downarrow}{\overset{-2}{[(n, n+2)]}}, \underset{\downarrow}{\overset{-1}{[(n, n+1)]}}, \underset{\downarrow}{\overset{0}{[(n, n)]}}, \underset{\downarrow}{\overset{1}{[(n+1, n)]}}$$

$$\equiv \mathbb{Z}$$

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

1) costruisco $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) Suddivido $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in classi di equivalenza

$$[(1,2)] = \{(1,2), (0,1), (2,3), \dots, (n, n+1)\} = (\to -1)$$

3) Introduco la somma tra classi

$$\overset{-1}{[(1,2)]} + \overset{-2}{[(5,7)]} = \overset{-3}{[(6,9)]}$$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

1) $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

2) $\underset{3/4}{[(3,4)]} = \{(3,4), (6,8), (-3,-4), \dots\}$

Analogamente al Teorema precedente

(Teorema)

Sia $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si fissi $a \in \mathbb{R}$

Allora la formula $\begin{cases} g(0) = a \\ g(n) = f(n, g(n)) \end{cases}$

definisce una funzione $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Definizione $n!$ è così definita

$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)\, n! \end{cases}$

$1! = 1 \cdot 0! = 1$
$2! = 2 \cdot 1! = 2$
$3! = 3 \cdot 2! = 6$

e viene detto "fattoriale di n"

$A = \{\square, \circ\}$

Si possono disporre in 2 modi

$\square \circ$
$\circ \square$

$B = \{1, 2, 3\}$

Si possono permutare in quanti modi

1 2 3	3 1 2
1 3 2	3 2 1
2 1 3	
2 3 1	

6 modi

Se ne ho 4?

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

Si permutano in 24 modi

$1\,?\,?\,? \longrightarrow 6$

$2\,?\,?\,? \longrightarrow 6$

$3\,?\,?\,? \longrightarrow 6$

$4\,?\,?\,? \longrightarrow 6$

$\overline{\quad 24 \quad}$

_ _ _ _

$H = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ li permuto in $n!$ modi

ovvero $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

ovvero $\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$

$H = \{1, 2, \dots, n\}$ n elementi

$\boxed{n}\quad \boxed{n-1}\quad \boxed{n-2}\quad \boxed{n-3}\quad \dots\quad \boxed{1}$ n celle

n modi diversi

$(n-1)$ modi $\neq$

$(n-2)$ modi $\neq$

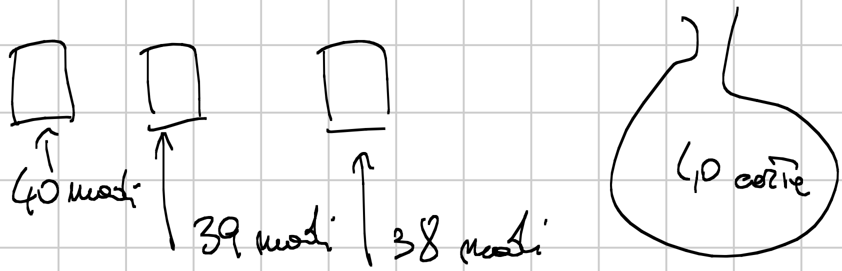
1 modi

$P_n \equiv$ permutazioni (o disposizioni) di n oggetti
Def

Esempio In quanti modi posso ammazzare un mazzo di 40 carte? $40!$

Altro problema: le disposizioni $D_{n,k}$

Problema
In quanti modi posso distribuire 3 carte in un certo ordine partendo da un mazzo di 40 carte



$$40\cdot 39\cdot 38 = D_{40,3} = \frac{40!}{37!}$$

$$= \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot \cancel{37}\cdot \cancel{36}\cdot \cdots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{37}\cdot \cancel{36}\cdot \cancel{35}\cdot \cdots \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$$

Problema Quante terne di vincitori posso formare se i corridori sono 40?

$D_{40,3}$

Altro problema: le combinazioni

$C_{n,k}$

A volte devo sapere in quanti modi mi arrivano 3 carte senza tenere conto dell'ordine di arrivo da un mazzo di 40 carte

$\square \quad \square \quad \square$

$40 \quad 39 \quad 38$

$$C_{40,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} = \frac{40!}{3!\,37!}$$

$$= \frac{40!}{3!\,(40-3)!}$$

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Combinazioni

Il numero di modi in cui selezionare k oggetti a partire da n oggetti (senza tenere conto dell'ordine)

Questo significa

"contare i sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme che ha n elementi"

Esempio
Considero un insieme di 5 elementi

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1° passo Quanti sono i sottoinsiemi con ϕ el.ti?

1 (il solo ϕ insieme vuoto)

dunque $C_{n,0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = \frac{5!}{5!} = 1$

2° passo Quanti sono i sottoins. con 1 elemento?

5 $\{1\}, \{2\}\ \{3\}\ \{4\}\ \{5\}$

e infatti $C_{5,1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$

3° passo Quanti ---- con 2 elementi?

{1,2} {1,3} {1,4} {1,5}

{2,3} {2,4} {2,5}

10

{3,4} {3,5}

{4,5}

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

4°) Quanti sono ---- con 3 elementi?

{1,2,3} {1,3,4} {1,2,4} {1,2,5} {1,3,5} {1,4,5}

{2,3,4} {2,3,5} {2,4,5}

{3,4,5}

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\;2\cdot 1} = 10$$

5°) Quanti sono ---- con 4 elementi?

5

{1234} {1235} {1345} {1,2,4,5}

{2345}

$$C_{5,4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5 \left(= C_{5,1}\right)$$

6° Quanti --- con 5 elementi ?

1

$$C_{5,5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$$

$$C_{5,0} + C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$$

$$= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$= 32 = 2^{5}$$

Oss 2^{5} non è un caso

Oss $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$ $\quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ $\quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

Oss

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \leftarrow
\end{array}$$