Lezione nro 7 - Lunedì 10 ottobre 2011

Titolo nota 09/10/2011

Assioma Dedekind

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\quad a \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

allora $\exists\, c \in \mathbb{R} \ : \ a \le c \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

Teorema $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma Dedekind

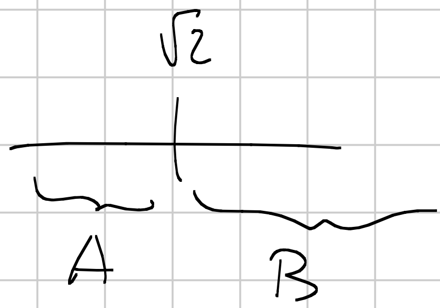
dim

Si esibiscono $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ t.c. $a \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

per cui $\boxed{\nexists\, c \in \mathbb{Q}} \ : \ a \le c \le b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

$A = \{ q \in \mathbb{Q} : \ q^2 < 2, \ q > 0 \}$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} : \ q^2 > 2 \ \ q > 0 \}$



① $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

② A non ha massimo

$\forall \ell \in A \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ N > \dfrac{2\ell + 1}{2 - \ell^2} \ : \ \ell + \frac{1}{N} \in A$

$$\left(L+\frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2L}{N}$$

$N^2 > N$

$1/N^2 < \frac{1}{N}$

$$< L^2 + \frac{1}{N} + \frac{2L}{N}$$

$$= L^2 + \frac{2L+1}{N}$$

Ricordo

$N > \frac{2L+1}{2-L^2}$

$2-L^2 > \frac{2L+1}{N}$

$$\left(L+\frac{1}{N}\right)^2 < \cancel{L^2} + 2 - \cancel{L^2}$$

$\Rightarrow L + \frac{1}{N} \in A$ quindi L non è il max!

<u>2° passo</u> B non ha minimo

$\forall L \in B \ \exists N > \frac{2L+1}{L^2-2}$ $\quad L - \frac{1}{N} \in B$

$$\left(L-\frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} - \frac{2L}{N}$$

$$> L^2 - \frac{1}{N} - \frac{2L}{N}$$

$$= L^2 - \frac{2L+1}{N}$$

Ricordo

$N > \frac{2L+1}{L^2-2}$

$L^2-2 > \frac{2L+1}{N}$

$2-L^2 < -\frac{2L+1}{N}$

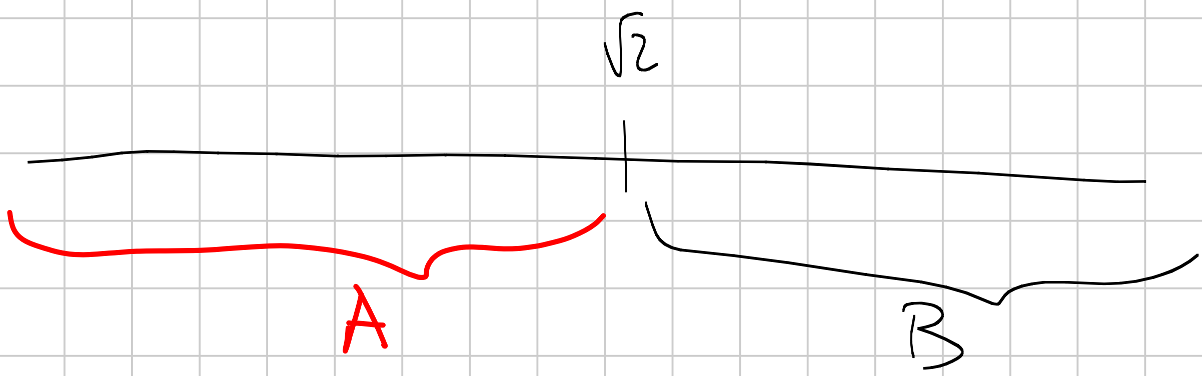
$$\left(L-\frac{1}{N}\right)^2 > \cancel{L^2} + 2 - \cancel{L^2}$$

$\Rightarrow L - 1/N \in B \Rightarrow$ B non ha min $\lightning$

Costruzione numeri reali attraverso le "sezioni"

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \ x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2 \ , x > 0\}$$



$$A \cup B = \mathbb{R}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

sezione

$$\sqrt{2} \longleftrightarrow (A, B)$$

Affermazione: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists A_x, B_x$:

$$A_x \cap B_x = \emptyset$$

$$A_x \cup B_x = \mathbb{R}$$

$$x \longleftrightarrow (A_x, B_x) \text{ sezione}$$

$$4 \longleftrightarrow \ A_4 = \{x \in \mathbb{R} \ \ x \leq 4\} \quad B_4 = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$$

$$A+B \underset{\text{Def}}{=} \{a+b \ : \ a\in A \ \ b\in B\}$$

Esempio $A =]-1,2[\qquad B =]2,3[$

$$A+B = \{a+b \ : \ a\in]-1,2[\ \ b\in]2,3[\}$$

$$=]1,5[$$

Date le sezioni (A,B) e (C,D)

definisco la somma come segue

$$(A,B)+(C,D) = (A+C, B+D)$$

e si può dimostrare che questa operazione

risulta associativa, commutativa ed

inoltre esiste l'elemento neutro

$$(]-\infty,0] ;]0,+\infty[)$$

Vediamo infatti che preso ad esempio

$$4 \longleftrightarrow (]-\infty,4] ;]4,+\infty[)$$

si ha che $4+0$ diventa

$$(]-\infty,4]+]-\infty,0] ;]0,+\infty[+]4,+\infty[) = \underset{\updownarrow}{\overset{4}{(]-\infty,4] ;]4,+\infty[)}}$$

Oss $A = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \ \ q^2 < 2 \}$ $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \ \ q^2 > 2 \}$ $\inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Conseguenza Assioma Dedekind

Teorema ($\exists$ estremo sup per insiemi limitati)

A limitato superiormente

1) $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $M_A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \Lambda = \sup A$

2) " , " e $m_A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda = \inf A$

dim

NON SO CHI SIA L'ESTREMO SUP

PERÒ SO CHE ESISTE

(DIM. di esistenza)

Oss In $\mathbb{Q}$ non si può garantire l'esistenza dell'estremo superiore e/o inferiore (vedi A e B costruiti prima) dim

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ $\quad$ TS $\exists \Lambda = \sup A$

$\forall a \in A \quad \forall b \in \mathcal{M}_A \qquad a \leq b$

Assioma Dedekind

$\Rightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad a \underset{(*)}{\leq} c \underset{(**)}{\leq} b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in \mathcal{M}_A$

(*) $\quad c \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow c \in \mathcal{M}_A$

(**) $\quad c \leq b \quad \forall b \in \mathcal{M}_A \Rightarrow c = \min \mathcal{M}_A$

$\Rightarrow c = \Lambda = \sup A$

2) m_A, $A \neq \emptyset \quad \forall l \in m_A \quad \forall a \in A \qquad l \leq a$

Assioma Dedekind

$\Rightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : l \leq c \leq a \quad \forall l \in m_A \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow$ c è un minorante $\qquad \Rightarrow c = \lambda = \inf A$

e è il max dei minoranti

Caratterizzazione estremo superiore

$\Lambda = \sup A$

$\underset{\text{Def}}{\iff} \quad \Lambda = \min \mathcal{M}_A$

$\iff \begin{cases} a \le \Lambda \quad \forall a \in A & (\Lambda \text{ è un maggiorante}) \\ \forall z < \Lambda \quad z \notin \mathcal{M}_A \end{cases}$

$\mathcal{M}_A = \{b \in \mathbb{R} \quad b \geq a \ \forall a \in A\}$

$\iff \begin{cases} a \le \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall z < \Lambda \quad \exists \bar{a} \in A \quad z < \bar{a} \end{cases} \quad (*)$

$\iff \begin{cases} a \le \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \Lambda - \varepsilon < \bar{a} \end{cases} \quad (**)$

Oss $\bar{a}$ dipende da z in $(*)$

$\bar{a}$ " " ε in $(**)$

Proprietà di Archimede (è come dire che $\sup \mathbb{N} = +\infty$)

$\forall x \in \mathbb{R}$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$: $\bar{n} > x$

dim

preso $x \in \mathbb{R}$ $\quad [x]$ = parte intera di x

$[1,5] = 1$

$[0,9] = 0$

$[1,9] = 1$

Preso x, si consideri $[x]$ = parte intera di x

Ovviamente $[x] \leq x < [x] + 1$

Supponiamo x assurdo che

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : n \leq x \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Sia $\bar{n} - 1 = [x]$: si ha

$\bar{n} - 1 \leq x$

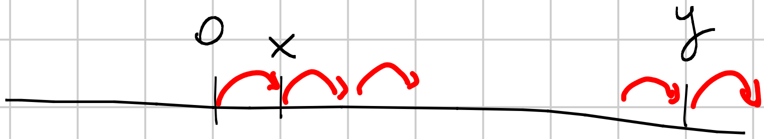
però $\mathbb{N}$ induttivo, ovvero $\bar{n} - 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \bar{n} \in \mathbb{N}$

e $x < \bar{n}$ Assurdo $\lightning$

Corollario

$\forall y, x \in \mathbb{R} \quad y > x > 0 \quad \exists \bar{n} : nx > y$

disegno



preso y/x; si ha che $\exists \bar{n} : \bar{n} > y/x$

$$\bar{n}x > y$$

ma questo è esattamente il principio di Archimede

Corollario

1) Se $x>0$ allora $\exists\, n\in\mathbb{N}$ $\quad 0<\frac{1}{n}<x$

2) Se $x\leq\frac{1}{n}$ $\forall n$ allora $x\leq 0$

dim

1) $\$\ \exists n : \frac{1}{n}<x$

$\$$ eq. $\exists n : 1<nx$

$\$$ eq. $\exists n : \frac{1}{x}<n$ — è la proprietà di Archimede

2) $\left[x\leq\frac{1}{n}\ \forall n\right] \Rightarrow \left[x\leq 0\right]$

$\Updownarrow$ (passo alla contronominale)

$\text{non}\left[x\leq 0\right] \Rightarrow \text{non}\left[x\leq\frac{1}{n}\ \forall n\right]$

$\Updownarrow$

$x>0 \Rightarrow \exists n \quad x>\frac{1}{n}$

①

Oss Quest'ultimo risultato permette di provare che $0 = \inf\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $B \subsetneq A$

Diciamo che "B è denso in A" se $\forall x, y \in A,\ x < y,\ \exists\, b \in B : x < b < y$

Oss Come conseguenza, se B è denso in A allora

$\forall a \in A \setminus B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_\varepsilon \in B : |a - b_\varepsilon| < \varepsilon$

$a - \varepsilon < b_\varepsilon < a + \varepsilon$

Infatti se $a - \varepsilon, a + \varepsilon \in A \quad \exists b_\varepsilon \in B$ ---

ovvero

POSSO APPROX ogni numero di A bene quanto voglio a partire dai numeri di B

Il risultato che segue è fondamentale in quanto $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ Irrazionali

fissato $\varepsilon = \frac{1}{100} \quad \exists b_\varepsilon \in \mathbb{Q} : \left|\sqrt{2} - b_\varepsilon\right| < \frac{1}{100} = \varepsilon$

infatti $b_\varepsilon = 1{,}41$

$0{,}004 < \sqrt{2} - 1{,}41 < 0{,}005$

$\varepsilon = \frac{1}{1000} \quad \exists b_\varepsilon = 1{,}414 \quad : \left|\sqrt{2} - 1{,}414\right| < \frac{1}{1000}$

e così via!

Si capisce (dimostra!) che, preso $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, si può trovare un numero razionale $q_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\left|q_\varepsilon - \sqrt{2}\right| < \varepsilon$$

$$\sqrt{2} - \varepsilon < q_\varepsilon < \sqrt{2} + \varepsilon$$

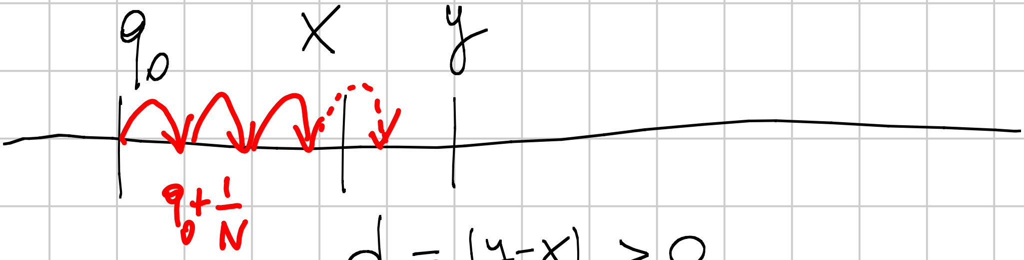
ovvero il numero reale prende forma grazie all'approssimazione razionale!!!

Teorema $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

dim

Prendo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad y \in \mathbb{R}$, $x<y$

Ts $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ $\quad x < q < y$



$d = |y-x| > 0$

Allora $\exists\, N>0$: $d > \frac{1}{N}$

Osservo che $\inf \mathbb{Q} = -\infty$

quindi esiste $q_0 \in \mathbb{Q}$ $\quad q_0 < x$

$$E = \{ m \in \mathbb{N} : q_0 + m \cdot \frac{1}{N} > x \}$$

$E \neq \emptyset$ infatti $m \cdot \frac{1}{N} > x - q_0$

$\exists\, m$ $\quad m > N(x-q_0)$

(Proprietà Archimede)

$E \subseteq \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$ allora $\exists\, \overline{m} = \min E$

Essendo $\overline{m}$ il minimo di E, $(\overline{m}-1) \notin E$ e

$$q_0 + (\overline{m}-1) \cdot \frac{1}{N} \leq x$$

dunque

$$x < \boxed{q_0 + \overline{m}\,\frac{1}{N}} = q_0 + (\overline{m}-1) \cdot \frac{1}{N} + \frac{1}{N}$$

$$< q_0 + (\overline{m}-1)\frac{1}{N} + d < y$$

$\Downarrow$