Lezione nro 6

Titolo nota 06/10/2011

5.2 Assioma di Dedekind

- Insiemi finiti, massimo e minimo
- unicità del massimo e del minimo
- insiemi infiniti
- insiemi senza massimo e/o minimo
- insieme dei maggioranti $\mathcal{M}_A$ (minoranti $\mathtt{m}_A$)

Definizione 5.2.1 *(Maggiorante/minorante di un insieme) Dato l'insieme A, diciamo* `maggiorante` *di A un numero b tale che $a \leq b$ per ogni $a \in A$. L'insieme dei maggioranti di un insieme A verrà indicato con $\mathcal{M}_A$.*
Analogamente diciamo `minorante` *di A un numero m tale che $m \leq a$ per ogni $a \in A$. L'insieme dei minoranti di un insieme A verrà indicato con $\mathtt{m}_A$.*

Definizione 5.2.2 *Diremo che un insieme A risulta*

- *limitato superiormente se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$;*

Def A si dice "finito" se esiste $\phi : \{1, \dots, n\} \to A$ biunivoca

A si dice "infinito" (di cardinalità) se non è finito

Oss Un insieme finito A non può essere mai messo in corrispondenza biunivoca con $B \subsetneq A$

Oss Se $\#A = \infty$ (cardinalità infinita) allora esiste $B \subsetneq A$ ed esiste

ϕ biunivoca t.c.

$\phi : A \longrightarrow B$

__Esempio__ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\#\mathbb{N} = \infty$

$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ $\#\mathbb{P} = \infty$

$\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$

$\exists\, \phi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{N}$ Biunivoca

$$\boxed{\phi(n) = \frac{n}{2}}$$

$0 \in \mathbb{P} \xrightarrow{\phi} 0 \in \mathbb{N}$

$2 \in \mathbb{P} \longrightarrow 1 \in \mathbb{N}$

$4 \in \mathbb{P} \longrightarrow 2 \in \mathbb{N}$

Hotel delle ∞ stanze:

Se l'hotel è pieno e arriva un nuovo cliente, nessun problema

Si prende il cliente della stanza $1 \longrightarrow 2$

" " " " " " $2 \longrightarrow 3$

etc

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$

$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow B$ Iniettiva

1

$$\begin{array}{cccc} 0, & 1, & 2, & 3 \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4 \dots \end{array}$$

$\phi f(n) = n+1$

Teorema

A insieme ordinato che ha massimo allora il max è unico

dim

Si procede per assurdo e si suppone che $\exists$ $M_1 = \max A$

$M_2 = \max A$ $\quad \underline{M_1 \neq M_2}$

$M_1 = \max A \iff a \leq M_1 \quad \forall a \in A$

e in particolare $M_2 \le M_1$ (*)

poiché $M_2 \in A$

$M_2 = \max A \iff a \le M_2 \ \forall a \in A$

e in particolare $M_1 \le M_2$ (**)

poiché $M_1 \in A$

(*) + (**) $\Rightarrow M_1 = M_2$ assurdo

(avevo supposto $M_1 \neq M_2$)

$\Rightarrow M_1 = M_2$ ↯

<u>Esempio</u> $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$= \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$

$0 = \min A$ infatti • $\forall n \ge 1$ $1 - \frac{1}{n} \ge 0$

• $0 \in A$

$\nexists \max A$ infatti $1 > a \ \forall a \in A$

però $1 \notin A$

1 rappresenta "qualcosa" per A in quanto

$$\boxed{1 > 1-\frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1}$$

infatti $\cancel{1} > \cancel{1} - \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} > 0 \ \forall n \geq 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} ; \cancel{1} - \frac{1}{\bar{n}} > \cancel{1} - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \quad \varepsilon > \frac{1}{\bar{n}}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \quad \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ ← Proprietà Archimedea

(1) $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \geq 1\right\} = A$

Def

$A \subseteq \mathbb{R}$ b è un "maggiorante di A"

se $a \leq b \quad \forall a \in A$

$\mathcal{M}_A$ = insieme dei maggioranti

$\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ allora A è limitato superiormente

$\mathcal{M}_A = \emptyset$ " A è illimitato superiormente

c si dice "minorante di A"

se $c \leq a \quad \forall a \in A$

$m_A \equiv$ insieme dei minoranti di A

$m_A \neq \emptyset$ allora A è limitato inferiormente

$m_A = \emptyset$ " A è illimitato inferiormente

Esempio

1) $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente

è illimitato superiormente

2) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ illimitato

sia superiormente

che inferiormente

③ $\left\{ 1-\frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} = A$

$m_A =]-\infty, 0]$

$M_A = [1, +\infty[\qquad 1 = \min M_A$

④ $A =]1, 5] \cup \{6\}$ → non ha minimo; $\max A = 6$

$m_A =]-\infty, 1] \qquad \max(m_A) = 1$

$M_A = [6, +\infty[\qquad \min M_A = 6$

<u>Def</u>

A dico estremo superiore di A

$\Lambda = \sup A \underset{\text{Def}}{=} \min M_A$

dico estremo inferiore di A

$\lambda = \inf A \underset{\text{Def}}{=} \max m_A$

Esempi

① $\mathbb{N}$

$\min \mathbb{N} = 0 = \inf \mathbb{N}$

$\max \mathbb{N} \nexists \qquad \sup \mathbb{N} = +\infty \quad (M_{\mathbb{N}} = \emptyset)$

② $\mathbb{Z}$

$\inf \mathbb{Z} = -\infty \quad (m_{\mathbb{Z}} = \emptyset)$

$\sup \mathbb{Z} = +\infty \quad (M_{\mathbb{Z}} = \emptyset)$

③ $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$

$m_A =]-\infty, 0]$

$\min A = 1 = \inf A \left(= \max m_A \right)$

$\max A \nexists$

$\sup A = 1 \left(= \min M_A \right)$

$M_A = [1, +\infty[$

$\Omega = \left\{ \operatorname{sen} \left(n \cdot \log \left(1 + |\operatorname{tg} n| \right) \right) : n \geq 1 \right\}$

$-1 \in m_\Omega \qquad 1 \in M_\Omega$

Ω è limitato sia superiormente che inferiormente

$\Downarrow$

$\exists \sup \Omega \quad \inf \Omega$?

Esercizio

$A = \emptyset \Rightarrow m_A = \mathbb{R}$ (x ass. $c \in \mathbb{R}$ $c \notin m_\emptyset$ $\Rightarrow \exists a \in \emptyset : c \leq a$ assurdo)

$M_A = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\inf \emptyset} = \max m_\emptyset = \max \mathbb{R} = +\infty$

$\underline{\sup \emptyset} = \min M_\emptyset = \min \mathbb{R} = -\infty$

non hanno senso

Non ha senso cercare $\sup \emptyset \quad \inf \emptyset$

(il vuoto non ha elementi!)

Esercizio 5.2.4 *Se* $A = \emptyset$, *quanto valgono* $\sup A$ *e* $\inf A$

- estremo superiore e inferiore, se esistono, sono unici;
- se esiste il massimo, allora questo è anche estremo superiore;
- se esiste l'estremo superiore, questo non è detto sia massimo;
- $\Lambda = \sup A = \min \mathcal{M}_A$ allora, in generale, $\Lambda \in \mathcal{M}_A \setminus A$
- in $\mathbb{Q}$ non esiste l'elemento separatore, ovvero dati due insiemi $A \subset \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$ tali che $a \le b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$ non è detto che esista $q \in \mathbb{Q}$ che soddisfi $a \le q \le b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$.
- ad esempio $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ma non solo: presi

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q > 0,\, q^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q > 0,\, 2 < q^2\} \subset \mathbb{Q}$$

questi sono separati ($a \le b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$), però non esiste nessun $L \in \mathbb{Q}$ tale che $a \le L \le b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$ (non può essere $L^2 = 2$, in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;:\; a \in \mathbb{Z},\; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

Assiomi di $\mathbb{Q}$

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right); \left(\frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right); \left(\frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$+$ e $\times$ sono associative $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

$+$ e $\times$ sono commutative $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$$

esiste el.to neutro per $+$ $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

esiste " " per $\times$ $\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

esiste l'inverso additivo ovvero

$$\forall\frac{a}{b},\ \exists y\in\mathbb{Q}:\frac{a}{b}+y=0$$

$$\left(y=-\frac{a}{b}\right)$$

esiste l'inverso moltiplicativo ovvero

$$\forall\frac{a}{b}\neq 0,\ \exists y\in\mathbb{Q}:\frac{a}{b}\cdot y=1$$

$$\left(y=\frac{b}{a}\right)$$

proprietà distributiva

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

Su $\mathbb{Q}$ è definito un ordine totale

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{sse} \quad \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq 0$$

in particolare, questo ordine è totale poiché

$\forall x \in \mathbb{Q}$, è verificata una ed una sola tra le seguenti eventualità

$x > 0$

o (disg.)

$x = 0$

o (disg)

$x < 0$

questo ordine è compatibile con + e ×

infatti

1° assioma ordine (compatibilità con somma)

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Longleftarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$

2° assioma ordine (compatibilità con il prodotto)

$\frac{a}{b} > 0 \qquad \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b}$

$\mathbb{Q}$ permette di fare tutti i nostri calcoli, purché ci si accontenti di un'approssimazione!!

$\sqrt{2}$

$\mathbb{Q} \ni 1 < \sqrt{2} < 2 \in \mathbb{Q}$ poiché $1^2 < 2 < 4$

$\mathbb{Q} \ni 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \in \mathbb{Q}$ poiché $(1{,}4)^2 < 2 < \underset{(1{,}5)^2}{\underbrace{2{,}25}}$

$\mathbb{Q} \ni 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \ni 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Teorema

x assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ m e n non entrambi pari

1° caso $m = 2k$ pari

n dispari

$$2k = \sqrt{2} \cdot n$$

$\Downarrow$ elevo al quadrato

$$\cancel{4}^{\,2} k^2 = \cancel{2} \cdot n^2$$

$$2k^2 = n^2$$

n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari Assurdo

2° m dispari

$n = 2k$ pari

$$m = \sqrt{2} \cdot 2k$$

$\downarrow$

$$m^2 = 8k^2$$

m^2 è pari $\Rightarrow$ m è pari

assurdo

3° m, n dispari

$$m = \sqrt{2} \cdot n$$

$\downarrow$

$$m^2 = 2n^2$$

m^2 è pari $\Rightarrow$ m è pari

assurdo

$\lightning$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$A = \{ q \in \mathbb{Q} : 0 < q \quad q^2 < 2 \}$

$\sqrt{2}$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} : 0 < q \quad 2 < q^2 \}$

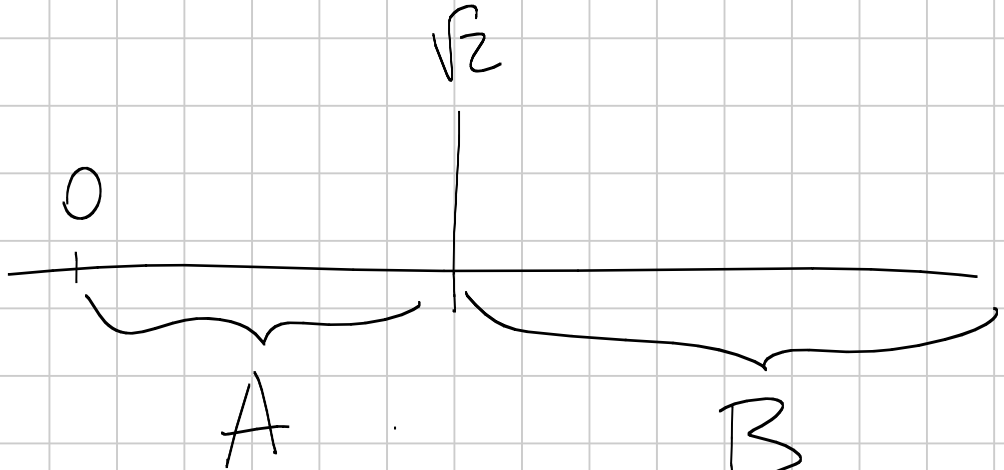
$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad A \leq B$

ovviamente $\sup A \leq \inf B$

Problema

$\exists L \in \mathbb{Q} : \quad a \leq L \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$?

Oss è chiaro che $\sqrt{2}$ gode di questa proprietà, in quanto $a \leq \sqrt{2} \leq b$ $\forall a \in A \quad \forall b \in B$



Teorema $\nexists \max A = \{q \in \mathbb{Q} \quad q > 0 \quad q^2 < 2\}$

dim

Infatti proveremo che

$$\forall L \in A \quad \exists N > \frac{2L+1}{2-L^2}, N \in \mathbb{N} : \ L + \frac{1}{n} \in A$$

Infatti $$\left(L + \frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2L}{N} \qquad N^2 > N \Rightarrow \frac{1}{N^2} < \frac{1}{N}$$

$$\leq L^2 + \frac{2L+1}{N}$$

$$< L^2 + 2 - L^2 = 2 \quad \checkmark$$

Ne segue che $L + \frac{1}{N} \in A$, ovvero

L non può essere max, comunque

si scelga L

$\lightning$

Analogamente si dimostra che

Teorema $\nexists \min B = \min\{q \in \mathbb{Q} \; q>0, q^2>2\}$

dim

Dimostriamo, analogamente al thm precedente, che

$$\forall L \in B \quad \exists N > \frac{2L+1}{L^2-2} \quad : L - \frac{1}{N} \in B$$

Infatti

$$\left(L - \frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} - \frac{2L}{N}$$

$$\geq L^2 - \frac{1}{N} - \frac{2L}{N}$$

$$= L^2 - \frac{2L+1}{N}$$

$$> \cancel{L^2} + 2 - \cancel{L^2}$$

$$= 2$$

ma $N > \frac{2L+1}{L^2-2}$

cioè $L^2-2 > \frac{2L+1}{N}$

cioè $2-L^2 < -\frac{2L+1}{N}$

ovvero $L - \frac{1}{N} \in B$, e quindi L non può essere il minimo di B comunque venga scelto $\lightning$

Ma la conseguenza dei risultati precedenti

è che

$\nexists\, q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

ovvero manca la "separazione" in $\mathbb{Q}$

<u>Assioma Dedekind</u> (di completezza)

$A, B \subseteq \mathbb{R} \quad a \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

$\exists\, c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A$
$\forall b \in B$

Se prendiamo l'insieme che soddisfa

(Tutti gli assiomi di $\mathbb{Q}$) + Assioma Dedekind

$\Downarrow$

$\mathbb{R}$ insieme dei reali