Lezione nro 5 del 4 ottobre 2011

Titolo nota 04/10/2011

Teorema 5.1.1 *(Teorema fondamentale dell'algebra) Se $P(z)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$, allora esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $P(z) = 0$.*

Osservazione 5.1.2 *Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che in $\mathbb{C}$ esiste almeno una radice dell'equazione $P(z) = 0$, e quindi ne esistono n, contate con la dovuta molteplicità, se n è il grado del polinomio.*

Esercizio 5.1.3 *Il polinomio $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ è di 3 grado, e si prova che* ~~*hanno*~~ esistono *3 radici in $\mathbb{C}$. In $\mathbb{R}$ se ne trova una sola*, ovvero $z_0 = 1$

$z_0 = 1 \quad z_1 = i \quad z_2 = -i$

Teorema 5.1.4 *Sia $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali, ovvero $a_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, ..., n$. Se $z \in \mathbb{C}$ è radice del polinomio, ovvero $P(z) = 0$, allora anche $\overline{z}$ è radice del polinomio, ovvero $P(\overline{z}) = 0$.*

N.B. Questo spiega perchè le radici complesse delle eq. di secondo grado a coeff. reali comparivano sempre a coppie!

$z^2+1=0$ non ha radici in $\mathbb{R}$, mentre ha 2 radici in $\mathbb{C}$ $\quad z_1 = i$ e $z_2 = -i$

$$\pi z^{1000} + 3 \cdot z^{560} + 2 \cdot z^{43} - 6 \cdot z^{27} = 0$$

ha 1000 radici in campo complesso (contate con la dovuta molteplicità!)

Oss $\quad P(z) = (z-1)^{1000}$

$P(z) = 0$ ~~se~~ $z = 1$ con molteplicità 1000

Oss Il thm fond. Algebra NON dice come calcolare le radici, ma garantisce l'esistenza di queste.

Esempio $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

$z_1 = 1$ è radice

$$(z-1)(z^2+1) = 0$$

$z_2 = i$ $z_3 = -i$ sono le 3 radici

Teorema

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, \dots, n$

Se $z \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z) = 0$ allora $P(\bar{z}) = 0$

dim

Hp $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

$$\left(\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}\right) = 0$$

Coniugato di una somma = somma coniugati

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

Coniugato di un prodotto = prodotto coniugati

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0$$

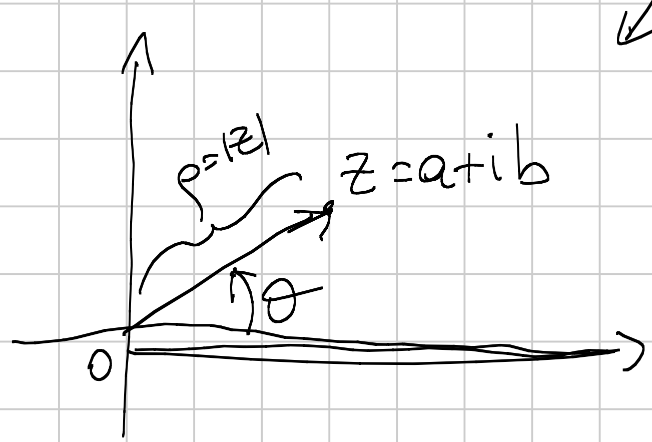
$a_i \in \mathbb{R}$ quindi $\overline{a_i} = a_i$

$$a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0$$

Coniugato di una potenza $\equiv$ potenza del coniugato

$$a_n \cdot (\overline{z})^n + a_{n-1} \cdot (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

$$P(\overline{z}) = 0$$

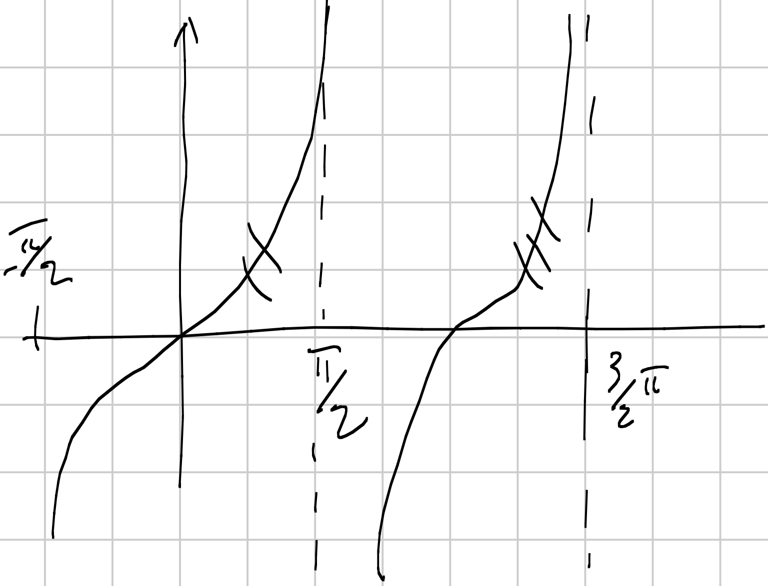


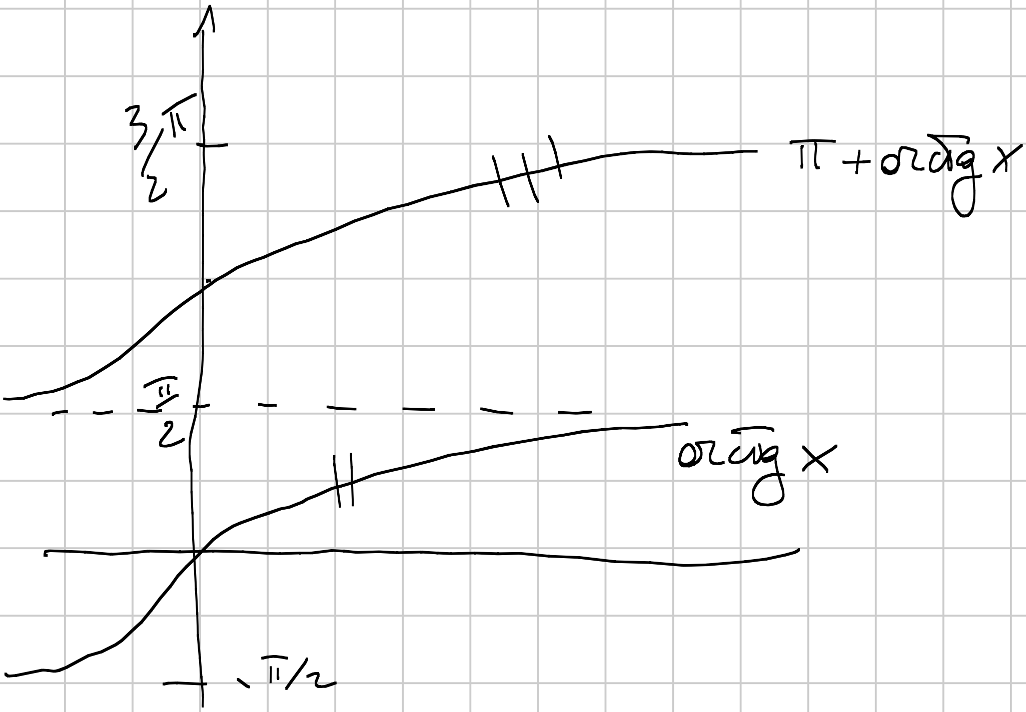
$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

"modulo di z"

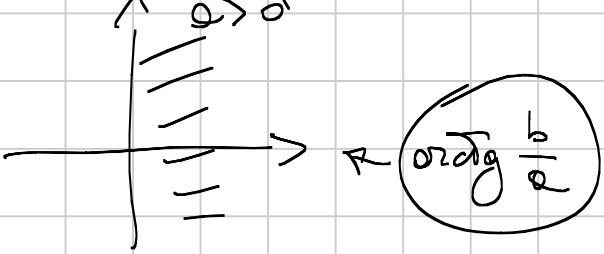
θ angolo formato dal vettore $(z - 0)$ con il semiasse positivo reale orientato in senso antiorario

$\theta = \arg(z)$ minimo angolo!





$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0 \quad b > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & a = 0 \quad b < 0 \end{cases}$$

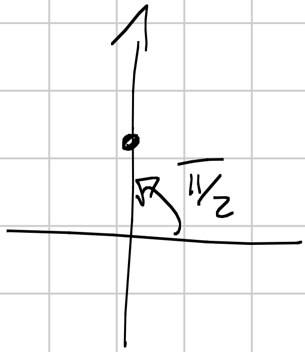


$a = \operatorname{Re} z$

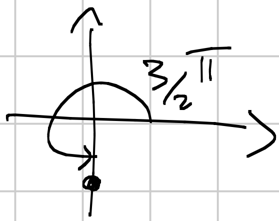
$a = \mathrm{Re}\, z < 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ $\pi + \arctan \frac{b}{a}$

$a = 0$ $\qquad$ $b > 0$



$a = 0$ $\qquad$ $b < 0$



Esempio $\qquad$ $z = 1 + i$ $\qquad$ $|z| = \sqrt{2}$

1° quadrante

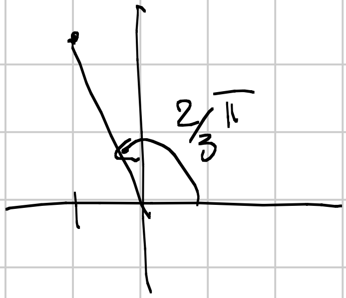
$\theta = \arg z = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

2° quadrante

$z = -1 + \sqrt{3}\, i$ $\qquad$ $|z| = 2$

$a = -1$ $\qquad$ $b = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\theta = \arg z = \pi + \arctan(-\sqrt{3})$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$



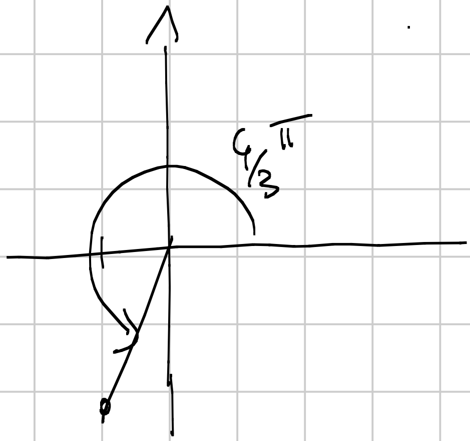
3° quadrante

$\hookrightarrow z = -1 - \sqrt{3}$ $\qquad |z| = 2$

$a < 0 \quad b < 0$

$\vartheta = \arg(z) = \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$

$= \pi + \pi/3 = \frac{4}{3}\pi$



4° quadrante

$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

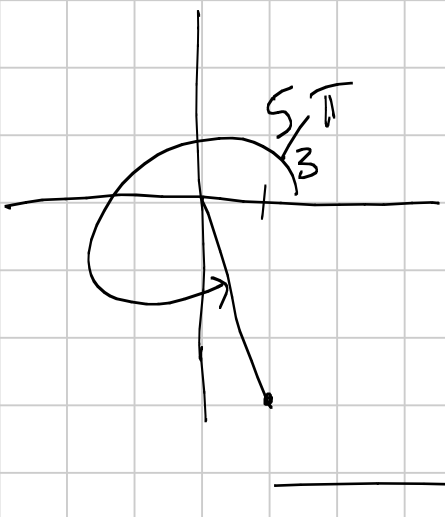
$\frac{1}{2} = a > 0$

$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\right) =$

$= -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

$= -\pi/3$

$= 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$



$z = |z| \cdot \cos\vartheta + i\,|z| \cdot \operatorname{sen}\vartheta$ Forma polare o Trigonometrica

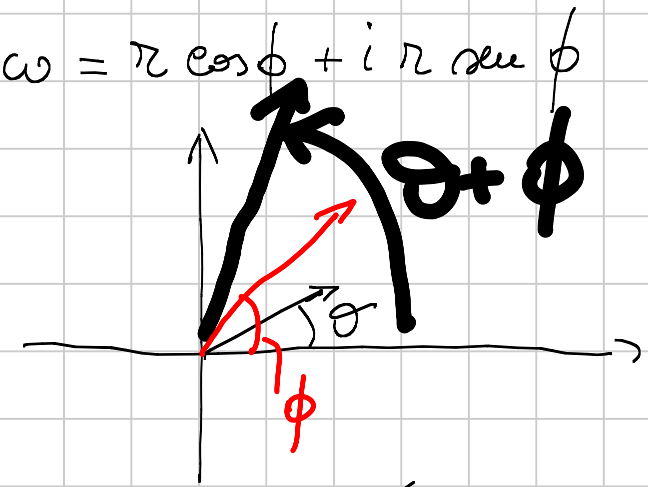
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad \operatorname{Re} z = |z| \cos\vartheta$ $\qquad \operatorname{Im} z = |z| \sin\vartheta$

$$z \cdot w = ac - bd + i(ad + bc)$$

$$z = a + ib \qquad w = c + id$$

$$z = \rho \cos\vartheta + i \rho \operatorname{sen}\vartheta$$

$$w = r\cos\phi + i r \operatorname{sen}\phi$$



$$z \cdot w = \rho \cdot r \left(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta\right)\left(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi\right)$$

$$= \rho \cdot r \left(\cos\vartheta\cos\phi + i\cos\vartheta \operatorname{sen}\phi + i \operatorname{sen}\vartheta\cos\phi + i^2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\phi\right)$$

$$= \rho r \left[\left(\cos\vartheta\cos\phi - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\phi\right) + i\left(\operatorname{sen}\vartheta\cos\phi + \cos\vartheta \operatorname{sen}\phi\right)\right]$$

$$= \rho r \left[\cos(\vartheta + \phi) + i \operatorname{sen}(\vartheta + \phi)\right]$$

$z \cdot w$ ha modulo $\equiv$ prodotto moduli

" argomento $\equiv$ somma argomenti

Formula di de Moivre

Dato $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \in \mathbb{C}$

allora $\forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$$

<u>dim</u>

$z^0 = 1$ base induzione

$z^1 = z$

$$z^2 = \left[\rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)\right]^2 =$$

$$= \rho^2 \cdot (\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)^2$$

$$= \rho^2 (\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\vartheta + i\operatorname{sen}2\vartheta) \cdot \rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

$$= \rho^3 \cdot (\cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta)$$

Hp induttiva $z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta)$

applico Hp. induttiva

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = \rho^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)\, \rho \cdot (\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

$$= \rho^{n+1} \cdot \left(\cos\left((n+1)\vartheta\right) + i \operatorname{sen}\left((n+1)\vartheta\right) \right)$$

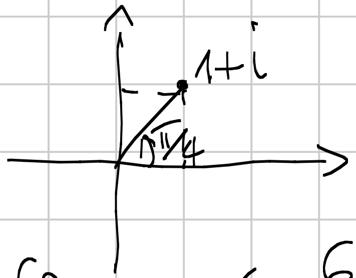
Esercizio Calcolare $(1+i)^{60}$

dim

1° passo forma polare di $z = 1+i$

$\rho = |z| = \sqrt{2}$ $\qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

dunque $1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$



$$(1+i)^{60} \underset{\text{De Moivre}}{=} \left(\sqrt{2}\right)^{60} \cdot \left(\cos\left(60 \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(60 \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{30} \left(\cos(15\pi) + i \operatorname{sen}(15\pi) \right)$$

$$= 2^{30} \cos \pi \qquad\qquad \cos 15\pi =$$

$$= -2^{30} \qquad\qquad = \cos(\pi + 14 \cdot \pi)$$

Definizione 5.1.7 *Dato $w \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$, diremo che z è una "radice $n-$esima del numero complesso w" se $z^n = w$.*

$n \geq 1$

Teorema 5.1.8 *Se $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora esistono n radici z_k, $k = 0, 1, ..., n-1$ del numero complesso w e sono date da*

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

~~Se $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ è una radice, allora~~

$$\cancel{z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

IN $\mathbb{R}$ l'estrazione di radice mi dava

$\emptyset$ risultati ($\sqrt{-3}$!)

1 risultato ($\sqrt[3]{8} = 2$)

2 risultati ($(-2)^2 = 4$ e $2^2 = 4$)

IN $\mathbb{C}$ esistono SEMPRE le radici n-esime, e sono n (e tutte $\neq$)

Oss Che esistano le radici n-esime lo si può dedurre dal Thm fondamentale dell'algebra: infatti se $P(z) = z^n - \omega$ allora il

Thm fond. dell'algebra dice che esistono

n soluzioni di $P(z)=0$, ovvero

$z^n - \omega = 0$ ha n radici (che però

potrebbero essere tutte coincidenti!)

dato

$\omega = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ si ha

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

Sia $z = r(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ una radice n-esima

di ω: allora

$$z^n = r^n\left(\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)\right) = \underbrace{\rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)}_{\omega}$$

allora

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \cos n\phi = \cos\vartheta \\ \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = |z| = \rho^{1/n} \\ n\phi = \vartheta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \phi = \dfrac{\vartheta}{n} + \dfrac{k}{n} \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \phi = \dfrac{\vartheta}{n} + \dfrac{hn + m}{n} \cdot 2\pi \end{cases} \qquad \text{ovvero } k = hn + m$$

$$\phi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{m}{n} 2\pi + 2h\pi \qquad m = 0, \dots, n-1 \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\phi_m = \frac{\vartheta}{n} + m \cdot \frac{2\pi}{n} \qquad m = 0, \dots, n-1$$

$$z_m = \rho^{1/n} \left(\cos \phi_m + i \operatorname{sen} \phi_m \right) \qquad m = 0, \dots, n-1$$

<u>Oss</u>

$$\rho^{1/n} \left(\cos(\phi_m + 2\pi) + i \operatorname{sen}(\phi_m + 2\pi) \right) = \rho^{1/n} \left(\cos \phi_m + i \operatorname{sen} \phi_m \right)$$

ovvero non tengo conto di $2h\pi$, poiché $\operatorname{sen}\vartheta$ e $\cos\vartheta$ sono funzioni periodiche

Esercizio

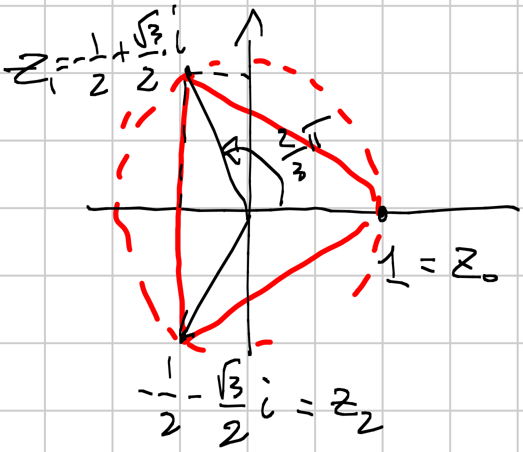
Calcolare $\sqrt[3]{1}$

$w = 1 \qquad |w| = 1 \qquad \vartheta = 0$

$w = 1 \cdot \left(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0) \right)$

$$z_k = 1^{1/3} \left(\cos\left(\frac{0}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 1^{1/3} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right) \qquad k = 0, 1, 2$$



Triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio = 1

Esercizio

Radici 4 di -1

$w = -1 \qquad |w| = 1 \qquad \vartheta = \pi$

$$z_k = 1^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}_2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}_2}\right)\right)$$

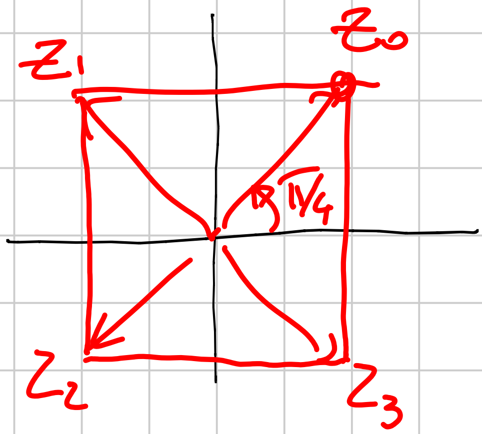
$k=0,1,2,3$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = +\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$w = 16$ radici 4

$w = -27$ radici 3

Numeri Reali

Teorema

Sia A un insieme finito ($\#A = n < \infty$) ovvero ha un numero finito di elementi

A limitato

allora esiste $m = \min A$
$M = \max A$

dim

dim è per induzione su n

$n=1$ $\exists \min A$ e $\max A$

$n=2$ (non serve) $\min A = \min\{a_1, a_2\}$
$\max A = \max\{a_1, a_2\}$

passo induttivo $\#A = n$ $\exists \min A$, $\max A$

sia ora $\#A = n+1$

$A = \{x_1, \dots, x_{n+1}\} = B \cup \{x_{n+1}\}$

dove $\#B = n$ $B = \{x_1 \dots x_n\}$

$$\min A = \min\{\min B, x_{n+1}\}$$

ma il minimo di B esiste poiché B ha n el.ti

$\Rightarrow \exists \min A$

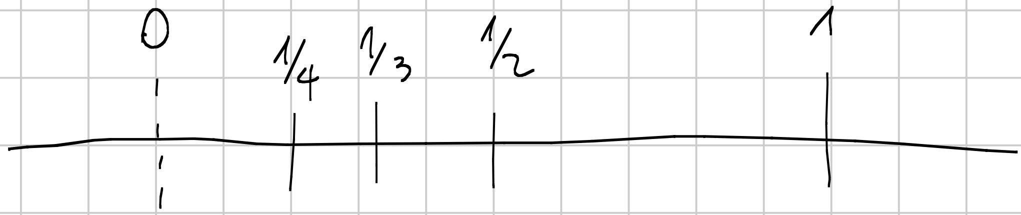
analogamente $\exists \max A$ ↯

Affermo che $\exists$ insiemi senza max
" min

(pur essendo limitati)

<u>Esempio</u> $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$



$\max A = \underline{1}$

$\min A$ non esiste

Sia $\frac{1}{\bar{n}} = \min A$

ma $\frac{1}{\bar{n}+1} \in A$ e $\frac{1}{\bar{n}+1} < \frac{1}{\bar{n}}$ $\lightning$

Però 0 sembra rivestire un ruolo

perché 1) $0 < 1/n \quad \forall n \geq 1$

2) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ 0 < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$

$0 = \inf A$ = estremo inferiore di A

= massimo dei minoranti di A

$m_A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a \ \ \forall a \in A\}$

Qualche chiacchiera sull'infinito!

Ora chiaro che vale il seguente teorema

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

1) esiste $\sup A = \min \mathcal{M}_A$
2) $\nexists \max A$, ovvero $\sup A \notin A$

allora $\# A = +\infty$

Def Un insieme A ha

"cardinalità n" se $\exists \phi : \{1, \dots, n\} \to A$ biunivoca

"cardinalità ∞" se non ha cardinalità finita...

Oss Se A ha cardinalità ∞

allora $\exists B \subsetneq A$

$\exists \phi : B \to A$ biunivoca

(ovvero A si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria)

Esempio $\# \mathbb{N} = +\infty$, e infatti

sia $\mathbb{P} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ = insieme numeri pari

Si ha che $\exists\ \phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$
$k \longmapsto 2k$

biunivoca (e nota bene che $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$)

<u>Esempio</u> $\#\mathbb{R} = +\infty$ e infatti

preso $]0, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}$ si ha che

$\exists\ \log x :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ biunivoca