

Lezione n° 4

Titolo nota

03/10/2011

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

1) $0 \in \mathbb{N}$

2) $n \in \mathbb{N}$ allora $n+1 \in \mathbb{N}$

3) $n \neq m$ $n, m \in \mathbb{N}$ allora $(n+1) \neq (m+1)$

4) (Principio di Induzione)

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ che soddisfa

1) $0 \in S$

2) $[n \in S \text{ allora } (n+1) \in S]$

Allora $S = \mathbb{N}$

Esercizio

Calcolare $1+2+3+4+\dots+1000$

dim

$$1+2+3+\dots+1000$$

$$1000+999+998+\dots+1$$

$$1001 + 1001 + 1001 + \dots + 1001 = 1000 \cdot 1001$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

1000 volte

$$\sum_{k=1}^{1000} k = 1+2+\dots+1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2}$$

Esercizio $\sum_{k=1}^{10^9} k = 1 + \dots + 10^9 \stackrel{?}{=} \frac{10^9 \cdot (10^9 + 1)}{2}$

Esercizio $\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 $\forall n \geq 1$

dim

$$S' = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

1° passo (base dell'induzione) $1 \in S'$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

2° passo Suppongo che $n \in S'$, ovvero

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

devo provare che $n+1 \in S'$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$(n+1) \in S'$$

Princ. Induzione

$$1 \in S$$

$$\Rightarrow S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$$

$$n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$$

Esercizio

$$q \in]-1, 1[$$

Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

dim

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right\}$$

$$S \quad S \equiv \mathbb{N}$$

1° passo $0 \in S$

$$\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 \quad \checkmark \quad = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = 1$$

$2^{\circ} \text{ caso } k=1?$

$$\left[\sum_{k=0}^1 q^k = 1 + q \quad \checkmark \quad = \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} = 1 + q \right]$$

2° passo (per induzione)

Suppongo $n \in S$ ovvero

$H_{ip} \text{ ind.}$

$$\left[\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

Voglio provare $(n+1) \in S$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = (1 + q + \dots + q^n) + q^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1}$$

$H_{ip} \text{ induttiva} \checkmark = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{m+1}} + \cancel{q^{m+1}} - q^{m+2}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - q^{m+2}}{1 - q}$$

ovvero $(m+1) \in S$

Dunque per il principio di induzione

$$S \equiv \mathbb{N}$$

ovvero l'uguaglianza è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

$$z = a+ib$$

$$a = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$$

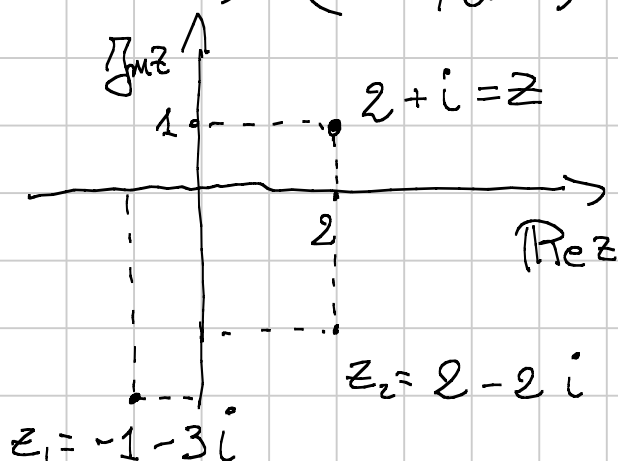
$$b = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$$

Om $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Im} z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

ovvero $\mathbb{C}$ è un "ampliamento"
di $\mathbb{R}$

Esempi $z = 1+i$, $z = 2-3i$, $z = -i$

$$z \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$$



" i " unità immaginaria

$$i^2 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$i \notin \mathbb{R}$$

$$(a+ib) + (c+id) = a+c + i(b+d)$$

Def

$$(a+ib) \cdot (c+id) = ac-bd + i(ad+bc)$$

Def

Ordine lexicografico

$$1+2i \leq 2+i$$

$$1 \leq 2$$

$$2+i \leq 2+2i$$

$$2 = 2$$

$$1 \leq 2$$

Questo ordine NON E' COMPATIBILE
CON LE OPERAZIONI

SO $\mathbb{C}$ NON ESISTONO ORDINI
COMPATIBILI CON LE OPERAZIONI

WWW.MATH.UNIPR.IT (dip. matematico)

"persone" pagine di Florino Belloni

$$\frac{1}{1+i} \in \mathbb{C} \quad \text{non } \bar{a+ib}$$

$$\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1+i-i-i^2} = \frac{1-i}{2}$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \in \mathbb{C}$$

$$z = \frac{2i}{3+i}$$

$$\frac{2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{6i - 2i^2}{9 - i^2}$$

$$= \frac{2+6i}{10}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \in \mathbb{C}$$

Def

$z = a + ib$ diciamo "coniugato di z "

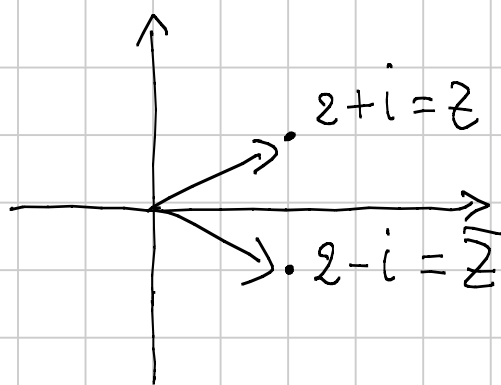
il numero $\bar{z} = a - ib$

Om

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z} \quad \text{mentre} \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$$

Om

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$



$$z = -3i \rightarrow \bar{z} = 3i$$

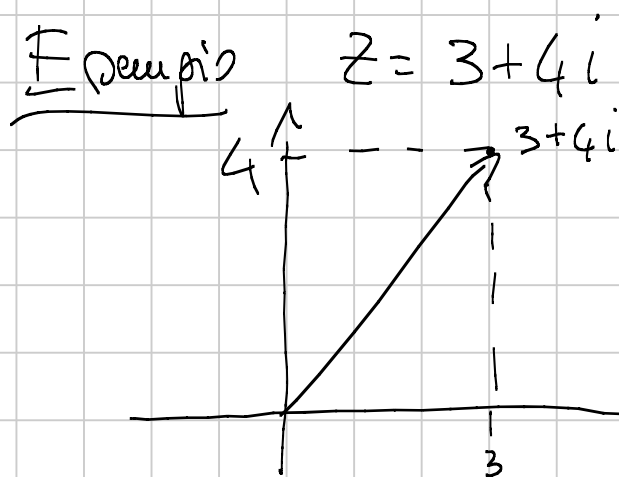
$$z = -1+i \rightarrow \bar{z} = -1-i$$

Def

$z \in \mathbb{C}$, diciamo "modulo di z "

il numero REALE $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

dove $z = a + ib$



Om $z = a + ib$ allora $\bar{z} = a - ib$

Quanto fa $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib)$

$$= a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 \cdot b^2 = a^2 + b^2$$

dunque $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Esercizio $z = 3 - i$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{9+1}$$

$$= \frac{3}{10} + i \cdot \frac{1}{10}$$

Esercizio 1.4.1 Determinare le soluzioni di $2z + i = iz - 1$.

Esercizio 1.4.2 Determinare le soluzioni di $z^2 + 1 = 0$ (in due modi?)

Esercizio 1.4.3 Determinare le soluzioni di $z^2 - 2z + 5 = 0$ (in 2 modi?)

Determinare le soluzioni ^{in $\mathbb{C}$} di $2z + i = iz - 1$
dim

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \underline{z = a + ib}$$

$$2(a + ib) + i = i(a + ib) - 1$$

$$2a + i \cdot 2b + i - i \cdot a - i^2 \cdot b + 1 = 0$$

$$(2a + b + 1) + i(2b + 1 - a) = 0$$



$$\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ 2b - a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 2a + 1 = 0 \\ 4b - 2a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} 5b + 3 = 0 \\ b + 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{3}{5} \\ 2a = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$z = -\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}$$

$$2z + i = iz - 1$$

$$2\left(-\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}\right) + i \stackrel{?}{=} i\left(-\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}\right) - 1$$

Altro modo

Si osserva che $z \neq 0$ ($z=0 \Rightarrow i=-1$)
assurdo)

$$2z+i = iz-1$$

$$2z-iz = -1-i$$

$$z(2-i) = -1-i$$

$$2-i \neq 0$$

$$z = \frac{-1-i}{2-i}$$

$$= \frac{(-1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i-i \cdot 2-i^2}{5}$$

$$= \frac{-1-i \cdot 3}{5} = -\frac{1}{5} - i \frac{3}{5}$$

Esercizio $z^2 + 1 = 0$

Al momento non so fare la radice
di un numero complesso

Dunque pongo $z = a+ib$

$$(a+ib)^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + i \cdot 2ab + i^2 b^2 + 1 = 0$$

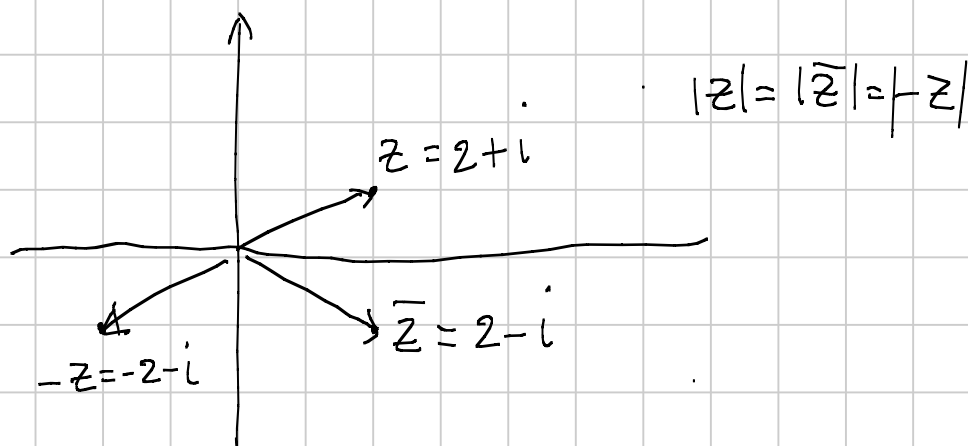
$$(a^2 - b^2 + 1) + i \cdot 2ab = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 1 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a^2 = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

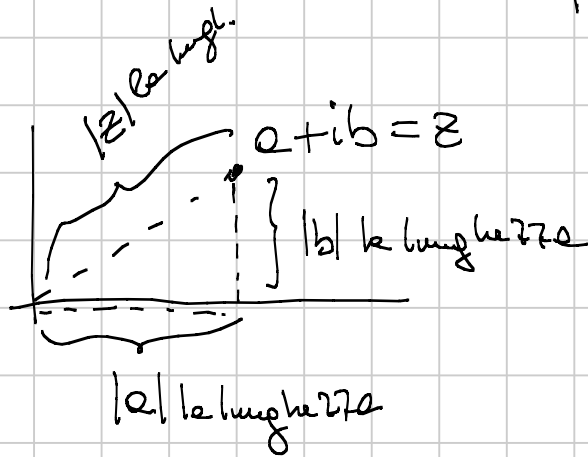
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \text{No sol} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = i \text{ e } z_2 = -i$$

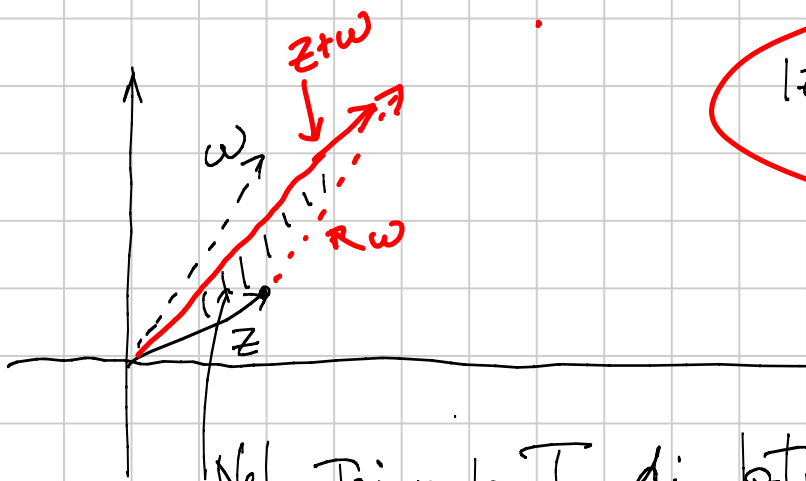
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ✓
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ ✓
- $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z|$ ✓
- $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ✓
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ ✓
- $|z \cdot w| = |z||w|$ ✓ verifica



$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \begin{cases} \geq |\operatorname{Re} z| \\ \geq |\operatorname{Im} z| \end{cases}$$



$$|z| \leq |a| + |b| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$



$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Nel Triangolo T , di lati aventi lunghezze $|z|$, $|w|$ e $|z+w|$

si ha che la somma di due lati
è più grande del lato rimanente, ovvero

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

le verifico in fa prendendo $z = a + ib$
 $w = c + id$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

ovvero $|zw| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$

ma $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|w| = \sqrt{c^2 + d^2}$ 