Lezione n° 3

Titolo nota 29/09/2011

Introduciamo la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, ovvero il "valore assoluto (o modulo) di x". Questa funzione si definisce come segue:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Vediamone le proprietà

- $|x| = x$ se $x \geq 0$, mentre $|x| = -x$ se $x < 0$. ← è immediata dalla def
- $|x| = 0$ se e soltanto $x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

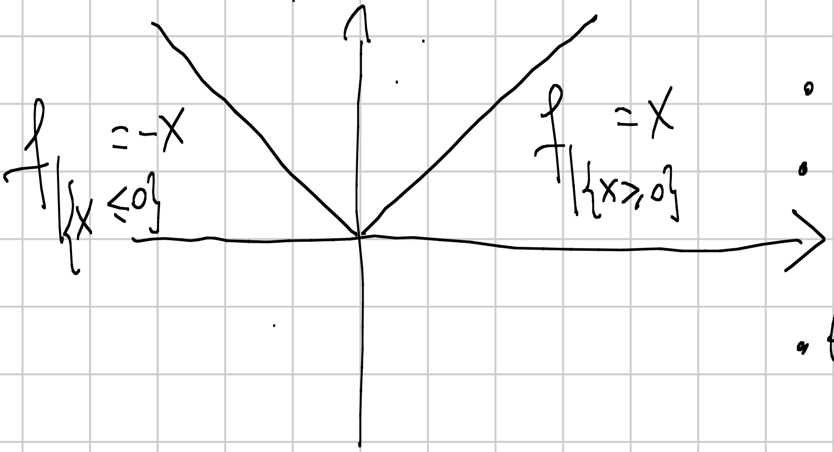
Inoltre, comunque si prendano x e y in $\mathbb{R}$

- $|x| \leq y$ se e soltanto se $-x \leq y \leq x$;
- $|x| \geq y$ se e soltanto se $[(x \geq y)\, o\, (-x \geq y)]$;

Infine ci sono le due disuguaglianze triangolari

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (infatti $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq x \leq |y|$....);
- $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ -x, \text{ se } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



- continua
- non derivabile in $x = 0$
- lineare a tratti

Def $f : A \to \mathbb{R}$, dato $B \subseteq A$ diciamo "restrizione di f a B" la funzione

$f_{|B}(x) = f(x) \quad \forall x \in B$

$|x| \underset{\text{def}}{:=} \max\{x, -x\}$

$x = 3 \qquad |3| = \max\{3, -3\} = 3$

$x = -\pi \qquad |-\pi| = \max\{-\pi, -(-\pi)\} = \pi$

$|x| = 0$ <u>sse</u> $x = 0$ infatti

$\Leftarrow$ se $x = 0$ allora $\max\{0, -0\} = 0 = |0|$

$\Rightarrow$ x assurdo la tesi sia falsa, ovvero $x \neq 0$

sia $x > 0$: in tal caso $|x| = \max\{x, -x\} = x \neq 0$
assurdo
$(|x| = 0)$

sia $x < 0$: in tal caso $|x| = \max\{x, -x\} = -x \neq 0$
assurdo
$(|x| = 0)$

$\Rightarrow$ l'ipotesi $x \neq 0$ è falsa $\Rightarrow x = 0$!! ↯

$|x| = |-x|$ <u>infatti</u>

$|x| = \underline{\max\{x, -x\}}$

$|-x| = \max\{-x, -(-x)\} = \max\{-x, x\}$

$= \underline{\max\{x, -x\}}$

- $-|x| \overset{1}{\leq} x \overset{2}{\leq} |x|$ infatti

(2) $|x| = \max\{x, -x\} \geq x$ ok

(1) $|x| = \max\{x, -x\} \geq -x$

$\Updownarrow$

$-|x| \leq x$ ok

- $|x| \leq y$ <u>sse</u> $-y \leq x \leq y$ <u>infatti</u>

$|x| = \max\{x, -x\} \leq y$

$\Updownarrow$

$\boxed{x \leq y \text{ e } -x \leq y}$

$\Uparrow$

$$x \leq y \quad e \quad x \geq -y$$

$$\Updownarrow$$

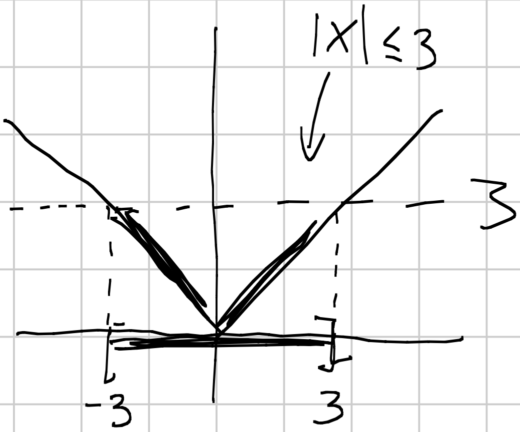
$$-y \leq x \leq y$$

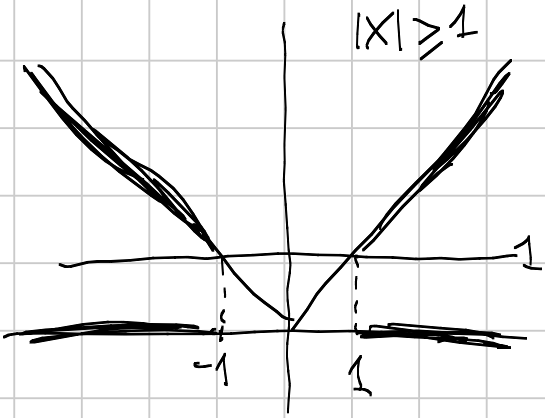
- $|x| \geq y \iff \left[(x \geq y) \ \sigma \ (-x \geq y) \right]$ infatti

$$\max\{x, -x\} \geq y$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[(x \geq y) \ \sigma \ (-x \geq y) \right]$$





$|x+y| \leq |x| + |y|$ disuguaglianza triangolare

$-|x| \leq x \leq |x|$ vera

$-|y| \leq y \leq |y|$ vera

$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

$\Updownarrow$ infatti $|A| \leq B \iff -B \leq A \leq B$!

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

- $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

la dis. triangolare

$$|x| = |x-y+y| = |y+(x-y)| \leq |y| + |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| = |x+(y-x)| \leq |x| + |y-x|$$

$\Updownarrow$

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y|-|x| \leq |x-y|$$

$\Updownarrow$

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|x|-|y| \geq -|x-y|$$

$\Updownarrow$

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

$\Updownarrow$

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

Avviso

Mercoledì Pomeriggio

Corso di Recupero di Geometria

Prof. Amodosi Luciano

Venerdì pomeriggio ore 14 30

Corso di Recupero del Precorso

Prof. Pimozzi

1° Lezione correzione esame del 23

Esercizio 1.1.1 *Determinare le soluzioni di* $|x-3| = |2x-3| - 2$

Esercizio 1.1.2 *Determinare le soluzioni di* $|x-1| = |x+2| - 1$

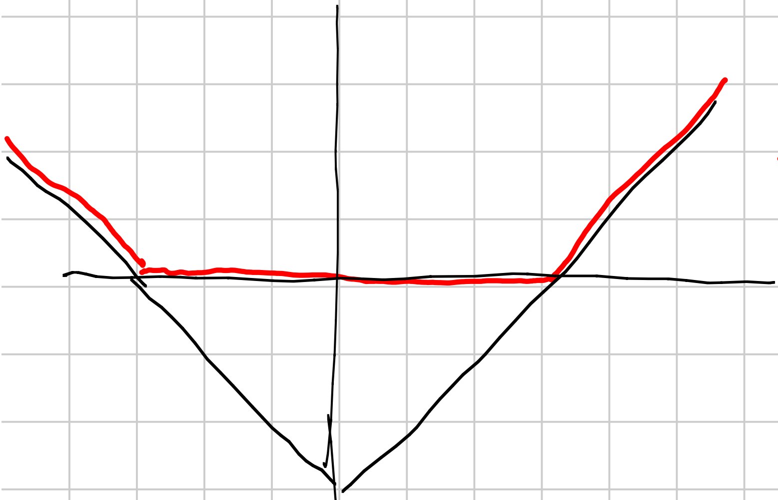
Esercizio 1.1.3 *Determinare le soluzioni di* $|2x - |x^2-3|| < 1$

Si possono poi definire

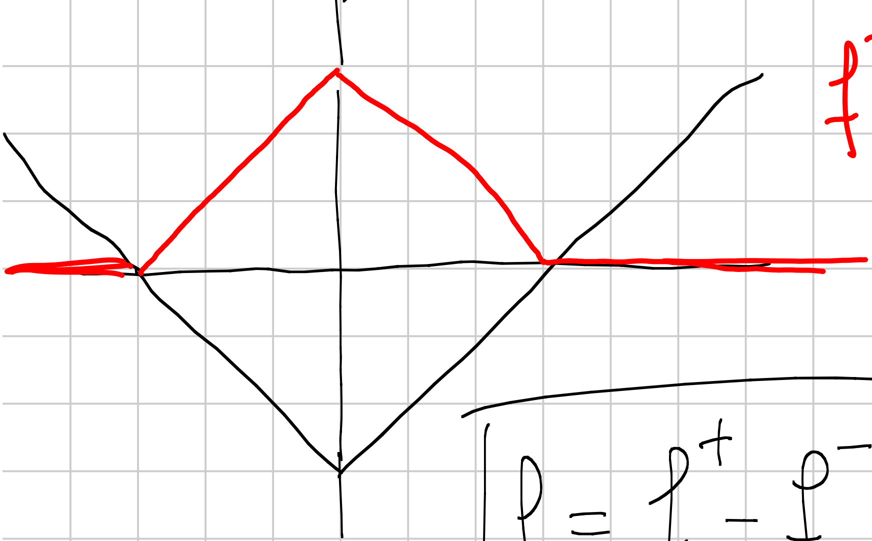
- $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$, la"parte positiva di f"
- $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, la "parte negativa di f"

Esempio $\quad f(x) = |x| - 3$

$$|f| = \begin{cases} -x-3 & x<-3 \\ x+3 & -3 \le x < 0 \\ 3-x & 0 \le x < 3 \\ x-3 & 3 \le x \end{cases}$$



$$f^+ = \begin{cases} -x-3 & x<-3 \\ 0 & -3 \le x \le 3 \\ x-3 & x>3 \end{cases}$$



$$f^- = \begin{cases} 0 & x<-3 \\ x+3 & -3 \le x < 0 \\ -x+3 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & 3<x \end{cases}$$

$$\boxed{|f| = f^+ - f^-}$$

Esercizio: Determinare tutte le soluzioni di

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$

Obiettivo: Togliere i moduli, ovvero tenere conto del segno delle funzioni che vi stanno all'interno

① $\cancel{\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3>0 \end{cases}}$ $\quad 2 = x$

② $\cancel{\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3\leq 0 \end{cases}}$ $\quad x = 4/3$

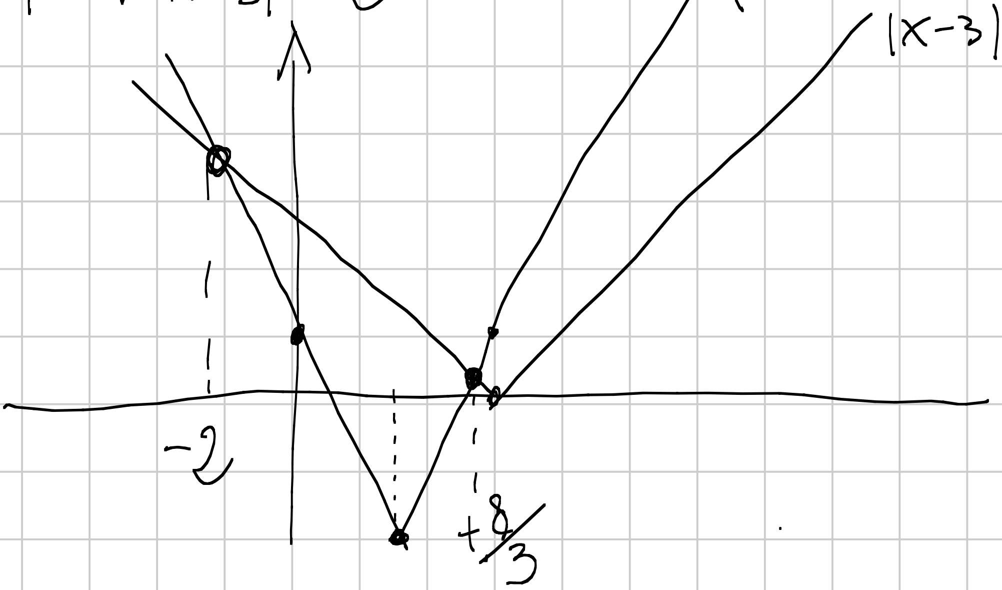
③ $\begin{cases} x-3<0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$ $\quad 8/3 = \cancel{3}x$ ✓

④ $\begin{cases} x-3\leq 0 \\ 2x-3\leq 0 \end{cases}$ $\quad x = -2$ ✓

Le soluzioni sono $x = -2$, $x = 8/3$

Per via grafica

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$



Esercizio Determinare tutte le soluzioni di

$$\left|2x-|x^2-3|\right|<1$$

$\Updownarrow$ si sfrutta il fatto che $|A|<1$ equivale a $-1<A<1$

$$-1<2x-|x^2-3|<1$$

$\Updownarrow$

$$-1-2x<-|x^2-3|<1-2x$$

$\Updownarrow$

$$1+2x>|x^2-3|>2x-1$$

(•) $\Updownarrow$ (••)

$$\begin{cases} |x^2-3|<1+2x \\ |x^2-3|>2x-1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} -1-2x<x^2-3<1+2x \\ (x^2-3>2x-1) \text{ o } (3-x^2>2x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1-2x<x^2-3 \\ x^2-3<1+2x \\ x^2-3>2x-1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -1-2x<x^2-3 \\ x^2-3<1+2x \\ 3-x^2>2x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2-2x-2>0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2+2x-4<0 \end{cases}$$

Numeri complessi

Cardano sapeva che l'equazione

$$x^3+ax+b=0$$

ha almeno 1 soluzione reale. E sapeva calcolarla: posto $x=u+v$

$$(u+v)^3+a(u+v)+b=0$$

$$u^3+v^3+3u^2v+3uv^2+a(u+v)+b=0$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+a(u+v)+b=0$$

$$u^3+v^3+(3uv+a)(u+v)+b=0$$

$$\begin{cases} uv=-\frac{a}{3} \\ u^3+v^3=-b \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3v^3=-\frac{a^3}{27} \\ u^3+v^3=-b \end{cases}$$

e quindi u^3 e v^3 soddisfano l'equazione

$$z^2+bz-\frac{a^3}{27}=0$$

$$\begin{cases} u^3 = \left(-b - \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ v^3 = \left(-b + \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}\right) \frac{1}{2} \end{cases} \qquad b=1 \quad a=-3$$

$$\begin{cases} u = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}\right)} \\ v = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}\right)} \end{cases}$$

e se ora prendo $z^3 - 3z + 1 = 0$

$$u = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4}\right)}$$

$$v = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right)}$$

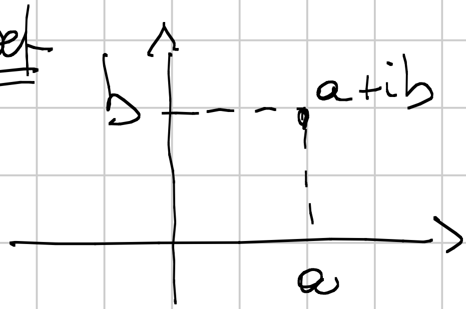
e almeno una delle somme è reale

$$\exists \bar{j} \quad u_{\bar{j}} + v_{\bar{j}} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{C} = \{a+ib \;:\; a,b\in\mathbb{R},\; i=\sqrt{-1}\}$$

$$(i)^2 = -1 \qquad i \notin \mathbb{R}$$

- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $(a+ib)(c+id) \underset{\text{Def}}{=} (a+c) + i(b+d)$
- $\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$



- $(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

<u>Def</u>