Lezione n.ro 2

Titolo nota 26/09/2011

Def Diciamo "funzione" una terna

$f: A \to B$

dove A dominio

B codominio

$f: A \to B$ è la legge che fa corrispondere

$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B : y = f(x)$

Esempio

$f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è una funzione

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$ non è una funzione

in quanto $f(0) \begin{cases} = 0 \\ = 1 \end{cases}$ ovvero

$f(0)$ non è univocamente

determinato

"Campo Esistenza di f"

$CE(f): \{ x : f(x) \in \mathbb{R} \}$

$$\underset{\text{funzione}}{f} : \underset{\text{dominio}}{A} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{B}$$

<u>Oss</u> in generale $A \neq CE(f)$.

$CE(f)$ è il dominio massimale.

Per costruire tutte le funzioni, si parte dalle funzioni elementari (e^x, $\sin x$, $\cos x$, x^n etc) e poi attraverso somma, prodotto e COMPOSIZIONE costruisco tutte le funzioni che desidero

$$x \longmapsto f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x)$$

Composizione di funzioni

Quando ha senso $(g \circ f)$?

$$f: A \to B \qquad g: C \to D$$

e la comp ha senso quando

$$f(A) \cap C \neq \emptyset$$

ed in tal caso $\quad g \circ f : \Omega \to D$

dove $\Omega = f^{-1}(f(A) \cap C)$!

<u>Oss</u> in generale $\Omega \neq A$

<u>Esempio</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = x^2$

$g:]-\infty, 9[\to \mathbb{R} \qquad g(y) = \log(9-y)$

$(g \circ f)(x) = \log(9-x^2)$

$$CE(g \circ f) =]-3, 3[= f^{-1}([0, 9[)$$

questo poiché $\;]0, 9[= f(\mathbb{R}) \cap]-\infty, 9[$

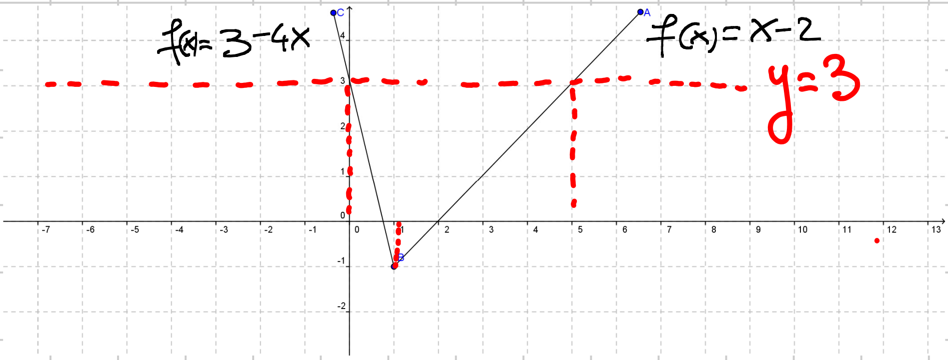
$$= \mathbb{R}^+ \cap]-\infty, 9[$$
$$= [0, 9[$$

Esercizio Determinare $(g \circ f)(x)$, dove

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 3-4x & x<1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \log(1+|x|) & x>3 \\ e^{3x} & x \leq 3 \end{cases}$$

dim

Si osserva che $g(f(x)) = \begin{cases} \log(1+|f(x)|) & f(x)>3 \\ e^{3f(x)} & f(x) \leq 3 \end{cases}$



$$g(f(x)) = \begin{cases} \log(1+|f(x)|) & f(x)>3 \\ e^{3f(x)} & f(x) \leq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log(1+|3-4x|) & \text{se} \quad x<0 \\ e^{9-12x} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ e^{3x-6} & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 5 \\ \log(1+|x-2|) & \text{se} \quad 5<x \end{cases}$$

Osserviamo che $f : \mathbb{R} \to [-1, +\infty[$

mentre $g : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$

e dunque $[-1,+\infty[\cap \mathbb{R} = [-1, +\infty[\neq \emptyset$, ovvero $g \circ f$ ha senso

Def $f: A \to B$ si dice monotona debolm. crescente

se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

La mon decrescenza è analoga

$f(x) = e^x$ è $\nearrow \Rightarrow e^{h(x)} \leq e^{g(x)} \Leftrightarrow h(x) \leq g(x)$

$g(x) = \log_e x$ è $\nearrow \Rightarrow \log(h(x)) \leq \log(g(x)) \Leftrightarrow h(x) \leq g(x)$

Dunque per studiare una diseq. logaritmica o esponenziale ci si riduce a una diseq. polinomiale o razionale

<u>Esercizio</u> Risolvere

$$25^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x}$$

$$5^{4x^2-8} > 5^{10-2x^2-12x}$$

e questa equivale a $\quad 4x^2-8 > 10-2x^2-12x$

cioè $\quad 6x^2+12x-18 = 6(x^2+2x-3) > 0$

cioè $\quad (x+3)(x-1) > 0$

cioè $\quad x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

Sono le disequazioni del tipo

a) $\sqrt{f(x)} < g(x) \quad (\leq)$

b) $\sqrt{f(x)} > g(x) \quad (\geq)$

c) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \quad (\geq \circ \leq)$

Esercizio: per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la disequazione

(1) $\sqrt{7-x} < x-1$

Risolviamo $\sqrt{7-x} < x-1$

che equivale a $\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 7-x < (x-1)^2 \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} x \leq 7 \\ 1 \leq x \\ x^2-2x+1+x-7 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ x^2-x-6 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \in [1,7] \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \in [1,7] \\ x \in]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[\end{cases}$

$x \in]3,7]$

Esercizio: Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la disequazione

$$\sqrt{1-x} > 1-3x$$

La diseq. equivale a $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} > 1-3x \end{cases}$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 1-3x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ 1-3x \geq 0 \\ 1-x > (1-3x)^2 \end{cases}$$

$$x \in \left]\tfrac{1}{3}, 1\right] \cup \begin{cases} x \leq \tfrac{1}{3} \\ 9x^2-6x+1+x-1 < 0 \end{cases}$$

$$x \in \left]\tfrac{1}{3}, 1\right] \cup \begin{cases} x \leq \tfrac{1}{3} \\ 9x^2-5x < 0 \end{cases}$$

$$x \in \left]\tfrac{1}{3}, 1\right] \cup \begin{cases} x \leq \tfrac{1}{3} \\ 0 < x < \tfrac{5}{9} \end{cases}$$

$$x \in \left]\tfrac{1}{3}, 1\right] \cup \left]0, \tfrac{1}{3}\right]$$

$$x \in \left]0, 1\right]$$

Esercizio: determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente disequazione

$\sqrt{7-x} > \sqrt{x-3}$

In tal caso la disequazione equivale a

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 7-x > x-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 7 \\ 3 \leq x \\ 10 > 2x \end{cases} \qquad x \in [3,7] \cap]-\infty, 5[$$

ovvero $x \in [3,5[$