Lezione n.ro 1 Analisi 1 2011/12

Titolo nota 26/09/2011

Presentazione del corso (vedi Diario delle lezioni)

Docente: Marino Belloni

Esercitatrici: Viviana Doldi
Deanna Fiorani

Modalità d'esame

1° test a risposta multipla (7 quiz)

se il punteggio è ≥ 9
(+3 risposte esatte, -1 risposta sbagliata)

si passa a fare la seconda prova

2° scritto a risposte aperte (4 esercizi)

3° Prova orale

Ogni giorno, esiste un'ora in cui dormo $(*)$

$x \equiv$ giorno, $y \equiv$ ora,

$D(x,y) \equiv$ dormo l'ora y del giorno x

$(*)$ $\forall x, \exists y : D(x,y)$ è vero

non $(*) \iff$ non $(\forall x, \exists y : D(x,y)$ è vero$)$

$\iff \exists x : \forall y \; D(x,y)$ è falso

$\iff$ "Esiste un giorno in cui non dormo nessuna ora"

Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} |z|^2+4=4\,|\Im m\, z| \\ \dfrac{4w^2+|z|^2\cdot\bar{z}}{|z-2i|}=0 \end{cases}$$

$z=a+ib \qquad a,b\in\mathbb{R} \qquad i=\sqrt{-1}$

$a=\text{Reale}(z) \qquad b=\Im m(z)$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{cases} |z|^2+4=4\,|\Im m\, z| \\ 4w^2+|z|^2\cdot\bar{z}=0 \\ z\neq 2i \end{cases} \qquad z=a+ib$$

$$\begin{cases} a^2+b^2+4-4|b|=0 \\ 4w^2+|z|^2\,\bar{z}=0 \\ z\neq 2i \iff \Im m\, z\neq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+(|b|-2)^2=0 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ |b|=2 \\ // \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ // \end{cases} \qquad \begin{matrix} |b|=2 \\ b=2 \\ b=-2 \end{matrix}$$

$$\overline{z} = \overline{(a+ib)} = a-ib$$

$$\begin{cases} z = -2i \\ 4w^2 + |z|^2\,\overline{z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2i \\ 4w^2 + \left(0^2 + (-2)^2\right)\cdot(+2i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2i \\ \cancel{4}w^2 = -\overset{2}{\cancel{8}}\,i \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -2i \\ w^2 = -2i \end{cases}$$

$$z = -2i, \quad w_1 = -1+i$$

$$z = -2i, \quad w_2 = 1-i$$

2) Data la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}(x-6)$, trovatene il campo di esistenza, i limiti agli estremi del campo di esistenza, il segno, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli estremi locali. Con tali informazioni, disegnate il grafico di f .
Trovate poi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\mathrm{e}^{-1/x^2}(x-6) = k$.

Risposta:

$$f = e^{-1/x^2}(x-6)$$

C.E. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad -\infty, 0^-, 0^+, +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to +\infty} e^{-1/x^2} \cdot \lim_{x \to +\infty} (x-6)$$

$$= 1 \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f = \ldots \ldots = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f = (-6) \cdot \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = (-6) \cdot 0 = 0$$

non cambia da 0^+ a 0^-

$$f(x) \geq 0 \iff e^{-1/x^2}(x-6) \geq 0$$

$e^z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$$\iff x - 6 \geq 0$$

$$\iff x \geq 6$$

$$f = e^{-1/x^2}(x-6)$$

$$f' = \left(e^{-1/x^2}\right)' \cdot (x-6) + e^{-1/x^2} \cdot (x-6)'$$

$$= e^{-1/x^2} \cdot \left(+\frac{2}{x^3}\right)(x-6) + e^{-1/x^2}$$

$$= e^{-1/x^2}\left(\frac{x^3+2x-12}{x^3}\right) \qquad \underline{x=2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad +2x-12 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+2x+6 \\ \hline 2x^2+2x-12 & \\ 2x^2-4x & \\ \hline // \quad 6x-12 & \end{array}$$

$$0 = f' = e^{-1/x^2} \cdot \frac{(x-2)(x^2+2x+6)}{x^3}$$

$$f' = 0 \iff x = 2, \quad x = 0$$

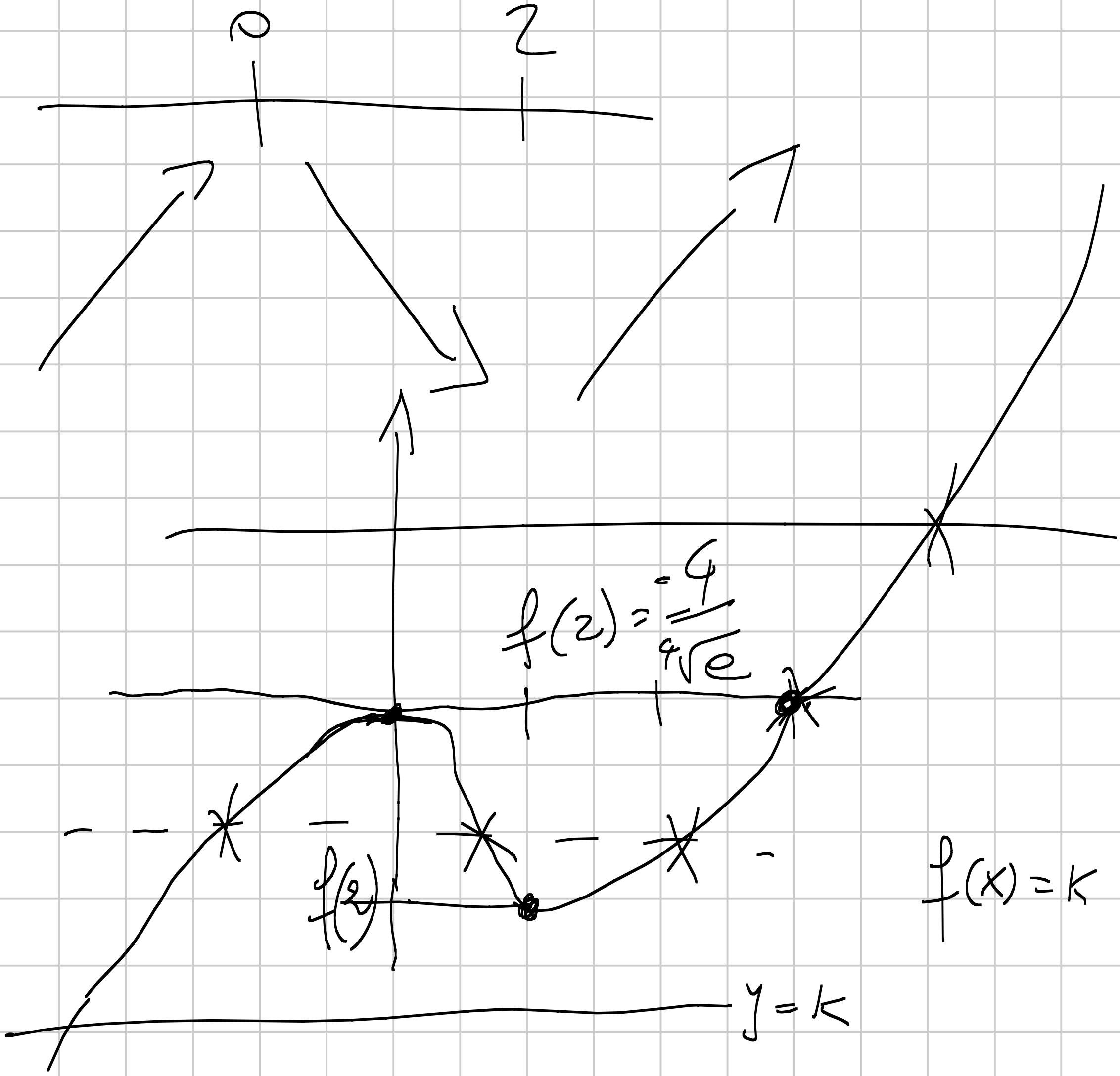
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -12 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$$

$$\frac{1}{x} = y \qquad = -12 \lim_{y \to +\infty} y^3 \cdot e^{-y^2}$$

l. notevole

$$= -12 \lim_{y \to +\infty} \frac{y^3}{e^{y^2}} = 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^-} f' = \ldots = 0^+$$



$k < f(2)$	$f(x) = k$	1 sol.
$k = f(2)$	" "	2 sol
$f(2) < k < 0$	"	3 sol
$k = 0$		1 sol
$0 < k$		1 sol

3) Calcolate, al variare dell'esponente $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{9x^\alpha - \operatorname{sen}^2(3x)}{2x^2(1+x) + x\log(1-2x)} \,.$$

Risposta:

$\uparrow +$

Denominatore

$$2x^2+2x^3+x\left(-2x-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}+o(x^3)\right)$$

$$=\cancel{2x^2}+\cancel{2x^3}-\cancel{2x^2}-\cancel{2x^3}-\frac{8}{3}x^4+o(x^4)$$

$$=-\frac{8}{3}x^4+o(x^4)$$

Numeratore

$$9x^\alpha-\operatorname{sen}^2(3x)=9x^\alpha-\left(3x-\frac{27x^3}{6}+o(x^4)\right)^2$$

$$=9x^\alpha-\left(9x^2-27x^4+o(x^4)\right)$$

$$\begin{cases} 9x^\alpha+o(x^\alpha) & \alpha<2 \\ 27x^4+o(x^4) & \alpha=2 \\ -9x^2+o(x^2) & \alpha>2 \end{cases}$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ \ -}{-\,-\,-}=\begin{cases} -\infty & \alpha<2 \\ -27\cdot\frac{3}{8} & \alpha=2 \\ +\infty & \alpha>2 \end{cases}$$

4) Trovate tutte le primitive in $\mathbb{R}^+$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}$.

Calcolate inoltre l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

(Solo Analisi 1) Posto poi $a_n = \int_n^{+\infty} f(x)\, dx$, studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_n (a_n)^\alpha$.

Risposta:

$$\int \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}\, dx \underset{y = 1/x}{=} \left(\int y^2 \arctan y \cdot \left(-\frac{dy}{y^2}\right) \right)_{y=\frac{1}{x}}$$

$$dx = -\frac{dy}{y^2}$$

$$= \left(-\int \arctan y\, dy \right)_{y=1/x}$$

$$= \left(-y \arctan y + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2}\, dy \right)_{y=1/x}$$

$$= -\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(2)$$

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n^2}$$

dunque $\sum_n a_n^\alpha \sim \sum_n \frac{1}{2n^{2\alpha}}$

e quest'ultima converge

se $2\alpha > 1$

se $\alpha > 1/2$