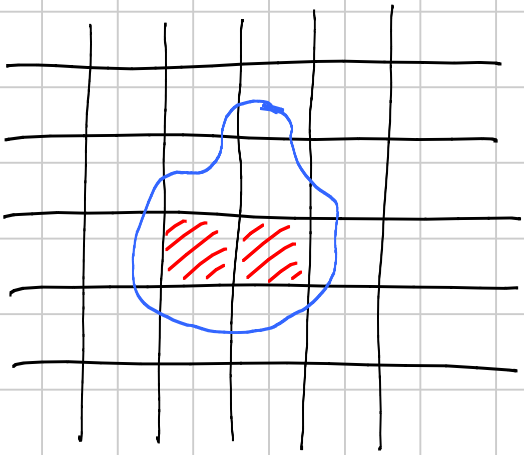
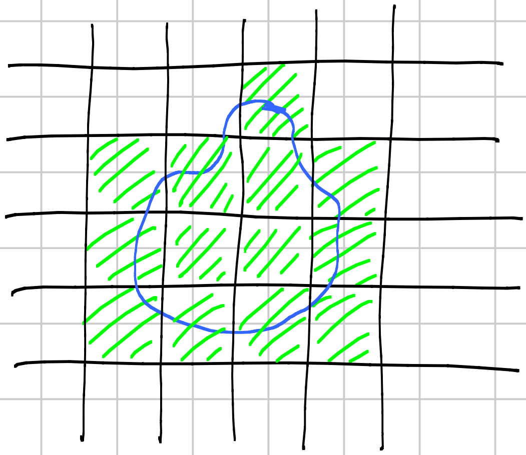
Integrale Definito

Titolo nota 04/12/2010

Dato un insieme A, è un vecchissimo pb. quello di calcolare le aree. In generale ci si accontenta di un'approssimazione





Naturalmente, quanto più la griglia si infittisce, quanto più la distanza tra

(Approx x eccesso) e (Approx per difetto)

si riduce. Questo è l'approccio che si segue nell'integrazione secondo Riemann data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$,

si approssima il sottografico di f

$$\{(x,y) : a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

con dei plurirettangoli

- inscritti (Approx per difetto)
- circoscritti (" " eccesso)

Sia data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione

- limitata su $[a,b]$ (ovvero $|f(x)|\le M \ \forall x\in[a,b]$)
- definita sull'intervallo limitato $[a,b]$

Oss Il grafico di una funzione cosiffatta è contenuto nel rettangolo limitato $[a,b]\times[-M,M]$

Def Dato un intervallo $[a,b]$, diciamo "suddivisione" di $[a,b]$ ogni sottoinsieme finito di $[a,b]$ $\quad \mathcal{A}=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

$$S'(f,\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$$

Somme di Darboux per difetto

$$S''(f,\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x_{k-1})\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$$

Somme di Darboux per eccesso

$$S'(f) = \sup \{ S'(f, A) : A \text{ suddivisione di } [a,b] \}$$

Integrale inferiore di f su $[a,b]$

Integrale superiore di f su $[a,b]$

$$S''(f) = \inf \{ S''(f, A) : A \text{ suddivisione di } [a,b] \}$$

<u>Def</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice

Riemann integrabile (o R-integrabile)

su $[a,b]$ <u>se</u> $S'(f) = S''(f)$

e questo valore comune è detto

"Integrale definito di f su $[a,b]$"

e $S'(f) = S''(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Osservazione</u> Ci sono funzioni limitate

su intervallo limitato che <u>non sono</u>

R-integrabili

ad esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(la f.ne di Dirichlet) è limitata su un intervallo limitato ma non è R-integrabile

Essendo $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ denso in $[0,1]$
$[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ " " "
si ha che

comunque si prende $\mathcal{A} = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$

$\forall k = 1 \dots n \quad \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0 \qquad \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1$

e quindi

$$S'(f, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall \mathcal{A} \implies S'(f) = 0$$

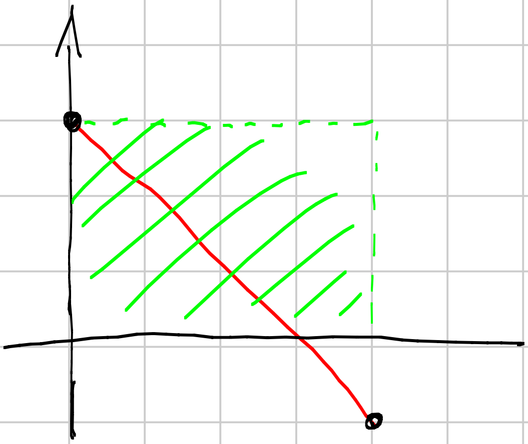
$$S''(f, \mathcal{A}) = 1 \quad " \implies S''(f) = 1$$

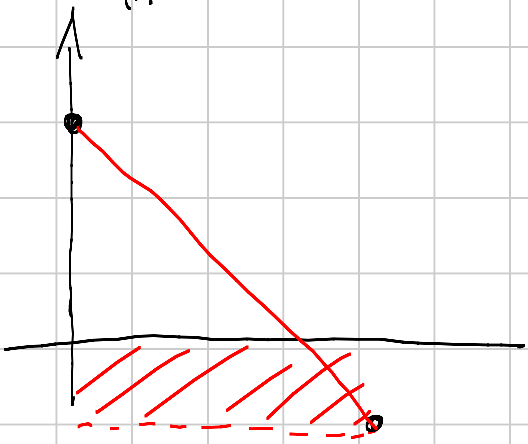
la differenza $S''(f, \mathcal{A}) - S'(f, \mathcal{A})$

decresce all'"infittirsi" di $\mathcal{A}$

Per capire come si comportano $S'(f,A)$ e $S''(f,A)$ al variare di A, prendiamo $f(x) = 3 - x$ su $[0,4]$

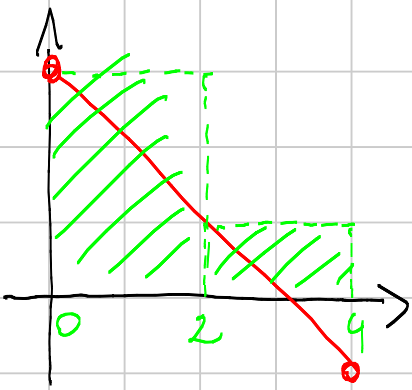
e consideriamo $A_n = \left\{ x_k = k \cdot \frac{4}{n} \quad k = 0,1,\dots,n \right\}$

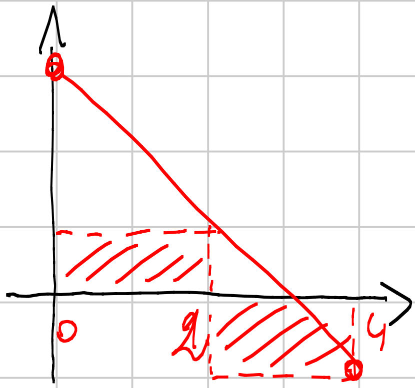




$$S''(f,A_1) = 4 \sup_{[0,4]} f = 12$$

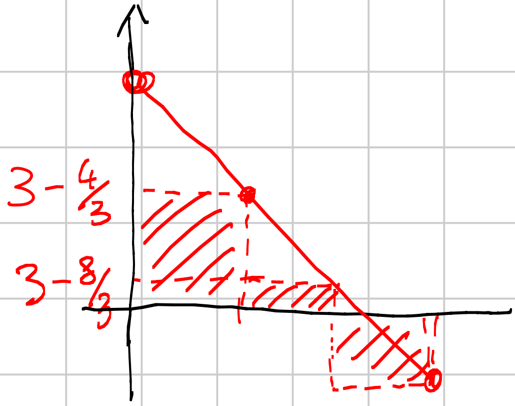
$$S'(f,A_1) = 4 \cdot \inf_{[0,4]} f = -4$$





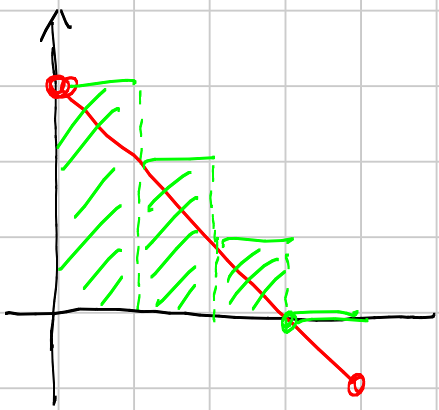
$$S''(f,A_2) = 2 \sup_{[0,2]} f + 2 \sup_{[2,4]} f = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 7$$

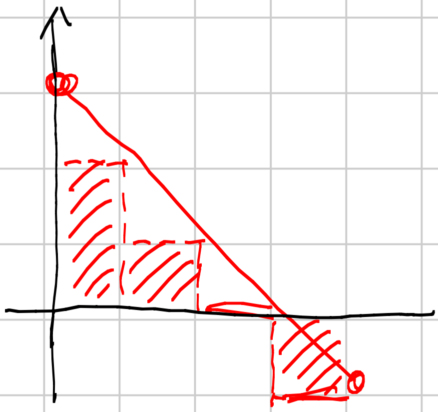
$$S'(f,A_2) = 2 \cdot \inf_{[0,2]} f + 2 \inf_{[2,4]} f = 2 \cdot 1 + 2(-1) = 0$$



$$S''(f,A_3) = 3\cdot\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\,\frac{9+5+1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$S'(f,A_3) = \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} + (-1)\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\,\frac{5+1-3}{3} = \frac{4}{3}$$





$$S''(f,A_4) = 3\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot1 = 6$$

$$S'(f,A_4) = 2\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot1 + (-1)\cdot1 = 2$$

$$12 > 7 > \frac{20}{3} > 6 \qquad 2 > \frac{4}{3} > 0 > -4$$

$$\boxed{4 = \text{valore esatto}}$$

Teorema $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

due suddivisioni di $[a,b]$

1) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Longrightarrow S'(f,\mathcal{A}) \leq S'(f,\mathcal{B})$

$$S''(f,\mathcal{B}) \leq S''(f,\mathcal{A})$$

2) $S'(f,\mathcal{A}) \leq S''(f,\mathcal{B})$

dim

1) Si supponga che $\mathcal{B}=\mathcal{A}\cup\{t\}$

(il caso generale va trattato per induzione) e

$z<t<w$ (dove z e w sono 2 punti di $\mathcal{A}$)

$$S'(f,\mathcal{B})$$

$$\shortparallel$$

$$S'(f,\mathcal{A})-(w-z)\inf_{[z,w]} f+(t-z)\inf_{[z,t]} f+(w-t)\inf_{[t,w]} f$$

ma ora

$$\underline{(t-z)\inf_{[z,t]} f+(w-t)\inf_{[t,w]} f} \geq (t-z)\inf_{[z,w]} f+(w-t)\inf_{[z,w]} f=\underline{(w-z)\inf_{[z,w]} f}$$

da cui segue che

$$S'(f,A) \le S'(f,B)$$

Analogamente si prova $S''(f,B) \le S''(f,A)$

2) Introduciamo $C = A \cup B$. Essendo $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ si ha

$$S'(f,A) \le S'(f,C) \le S''(f,C) \le S''(f,B)$$

da cui la Tesi $\boxed{//}$

<u>Corollario</u> $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, allora

$$S'(f) \le S''(f)$$

<u>dim</u>

La 2) del teorema precedente dice $S'(f,A) \le S''(f,B)$ comunque si prendono A e B suddivisioni. Ne segue

$$S'(f,A) \le \inf_{B} S''(f,B) = S''(f)$$ e quindi

$$S'(f) = \sup_{A} S'(f,A) \le S''(f)$$ $\boxed{//}$

<u>Teorema</u> $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

allora sono equivalenti tra loro

1) f è R-integrabile su $[a,b]$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni di $[a,b]$ t.c.

$$S''(f, \mathcal{B}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione di $[a,b]$ t.c.

$$S''(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$$

<u>dim</u>

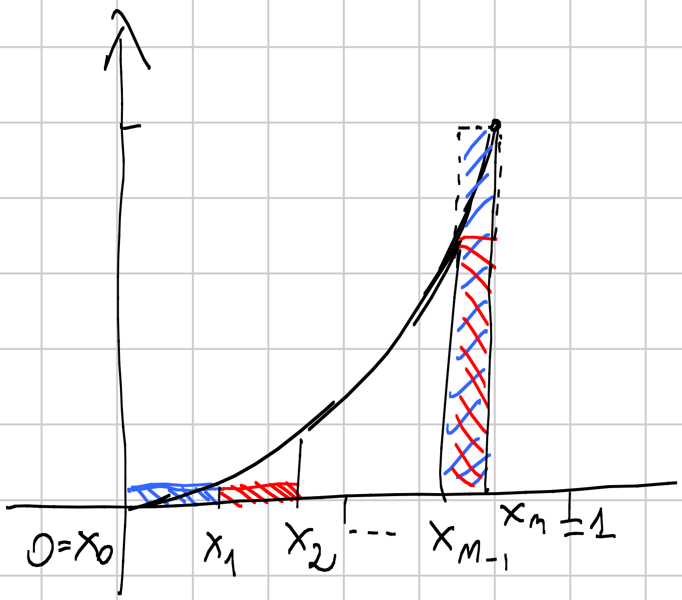
1) $\Leftrightarrow$ 2) segue da Def. estremo sup e inf
Def R-integrabilità

3) $\Rightarrow$ 2) ovvio, basta prendere $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon$

2) $\Rightarrow$ 3) basta prendere $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon$
e utilizzare il Teorema precedente ∎

Esempio: $\text{Area}\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\} = 1/3$

Nel Teorema che segue proveremo che $f(x) = x^2$, essendo monotona, è R-Integrabile.



$[0, 1/m] \begin{cases} 0 = \inf_{[0,1/m]} f \\ \frac{1}{m^2} = \sup_{[0,1/m]} f \end{cases}$

$[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \begin{cases} 1/m^2 = \inf_{[1/m, 1/m^2]} f \\ \frac{4}{m^2} = \sup_{[1/m, 2/m^2]} f \end{cases}$

$[\frac{m-1}{m}, 1] \begin{cases} (\frac{m-1}{m})^2 = \inf f \\ 1 = \sup f \end{cases}$

$$S'(f, A_m) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k-1}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^3} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{(m-1)\, m\, (2m-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(2 - \frac{1}{m}\right)$$

$$S''(f, A_m) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(2 + \frac{2}{m}\right)$$

e si ha $S''(f, A_m) \searrow \frac{1}{3}$ & $S'(f, A_m) \nearrow 1/3$ $\square$

Nota: per calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^2$ si può ragionare nel seguente modo:

1) $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = (n+1)^3-1 = n^3+1+3n^2+3n+1 = n^3+3n^2+3n$

2) $(k+1)^3-k^3 = k^3+1+3k^2+3k-k^3 = 3k^2+3k+1$ quindi

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

somma che vogliamo calcolare

somma nota $= \frac{n(n+1)}{2}$

somma nota $= n$

3) Quindi $n^3+3n^2+3n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1)+n$ da cui si ottiene che

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(2n^2+3n+1\right)$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)(2n+1)$$

Teorema (Le funzioni monotone sono R-integrabili)

Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monotona, allora

f è R-Integrabile

dim

Supponiamo $f \nearrow_=$, ovvero f monotona debolmente crescente. Proveremo che

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{A}_\varepsilon : \; S''(f, \mathcal{A}_\varepsilon) - S'(f, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$

$\mathcal{A}_n = \left\{ a + h \frac{b-a}{n} : h = 0, 1, \dots, n \right\}$

Essendo f monotona, $\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k)$ $\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1})$

e dunque

$$S'(f, \mathcal{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$S''(f, \mathcal{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$S''(f,\mathcal{A}_n)-S'(f,\mathcal{A}_n)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(b)+\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)} - f(a) - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)}\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

e questo prova il teorema $\boxed{\cancel{Rip}}$

<u>Teorema</u> (le funzioni continue sono R-Integrabili)

Data $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f è R-Integrabile

<u>dim</u>

Anche in questo caso proveremo che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon : \quad S''(f,\mathcal{A}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$$

Essendo f continua su $[a,b]$, f è U.C. (Teor Heine Cantor) è quindi

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x,y\in[a,b] \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Fissato $\varepsilon>0$, prendiamo una suddivisione

$$A_n = \left\{a + h\,\frac{b-a}{n} : h=0,\dots,n\right\}$$

tale che $\frac{b-a}{n}<\delta$ (ovvero "abbastanza fitta")

Esaminiamo l'intervallino $[x_{k-1},x_k]$: si ha che $\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]$ $\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

e quindi $\quad \max\limits_{[x_{k-1},x_k]} f - \min\limits_{[x_{k-1},x_k]} f < \varepsilon$

(questo perché f è u.c. e $|x-y|<\delta$, e inoltre per il Teorema Weierstrass $\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f = \max\limits_{[\ ]} f$ e $\inf\limits_{[\ ]} f = \min\limits_{[\ ]} f$)

Ma allora

$$\Delta S(f,A_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n}\cdot \overbrace{\left[\max_{[x_{k-1},x_k]} f - \min_{[x_{k-1},x_k]} f\right]}^{<\varepsilon}$$

$$< \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\varepsilon = \left(\frac{b-a}{\cancel{n}}\right)\cdot\cancel{n}\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot(b-a)$$

e questa è la tesi in quanto

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \mathcal{A}_\varepsilon \quad : \quad S''(f,\mathcal{A}_\varepsilon) - S'(f,\mathcal{A}_\varepsilon) < (b-a)\cdot\varepsilon$$

$\frac{b-a}{n} < \delta = \delta(\varepsilon)$

$\boxed{\cancel{R/p.//}}$

Teorema

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Se f continua nell'intervallo $]a,b]$ allora

1) f è R-integrabile su $[a,b]$

2) $\int_a^b f\,dx$ non dipende dal valore di $f(a)$

dim (Idea) $\quad |f|\leq M$

- f continua su $[a+\delta,b] \Rightarrow f$ R-integrabile su $[a+\delta,b]$ $\forall \delta>0$

- Dunque $\forall \varepsilon>0 \ \exists \mathcal{A}_\varepsilon : \Delta S(f|_{[a+\delta,b]}, \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$

- Prendo $\mathcal{B}_\varepsilon = \{a\}\cup\mathcal{A}_\varepsilon \Rightarrow \Delta S(f,\mathcal{B}_\varepsilon) \leq 2M\delta+\varepsilon \leq 3\varepsilon$

se si prende $\boxed{\delta \cdot M < \varepsilon}$

e quindi f è integrabile su $[a,b]$

La seconda affermazione si ottiene prendendo f_1 e f_2

con $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ $\forall x > a$ e $|f_1(x)| \leq M$ $|f_2(x)| \leq M$

mostrando $\left| \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right| \leq \dots 8\varepsilon$ $\square$

Teorema (f continua non negativa con integrale nullo è nulla)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

1) $f \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

allora $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

dim

Si fa per assurdo :

$f(x_0) > 0 \implies$ (Thm permanenza segno) $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ $\forall x \in]\alpha, \beta[$

dove $\emptyset \neq]\alpha, \beta[\subset [a, b]$, $x_0 \in]\alpha, \beta[$

$\Longrightarrow$ Presa $A = \{a, \alpha, \beta, b\}$ si ha che

$$S'(f, A) = (\alpha - a) \inf_{[a,\alpha]} f + (\beta - \alpha) \inf_{[\alpha,\beta]} f + (b - \beta) \inf_{[\beta,b]} f$$

$$\geq (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq (\beta - \alpha) \frac{f(x_0)}{2}$. Assurdo $\boxed{///}$

L'integrale definito risulta essere lineare e omogeneo (NO DIM.)

Teorema (linearità)

$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrabili, allora

1) $f + g$ è R-integrabile

2) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

dim (idea)

$$S'(f,A)+S'(g,B)\le S'(f,A\cup B)+S'(g,A\cup B)$$

$$\le S'(f+g,A\cup B)\le S'(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f\,dx+\int_a^b g(x)\,dx=S'(f)+S'(g)\le S'(f+g)=\int_a^b (f+g)(x)\,dx \quad (A)$$

аналогично

$$S''(f,A)+S''(g,B)\ge S''(f,A\cup B)+S''(g,A\cup B)$$

$$\ge S''(f+g,A\cup B)\ge S''(f+g)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f\,dx+\int_a^b g\,dx=S''(f)+S''(g)\ge S''(f+g)=\int_a^b (f+g)(x)\,dx \quad (B)$$

$$(A)\,\&\,(B)\Rightarrow \int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$$

Teorema (omogeneità)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile, $k \in \mathbb{R}$

allora

1) $(kf)(x)$ è R-integrabile

2) $$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

Dim (Idea)

Supponiamo $k > 0$; in tal caso si ha che

$$S'(kf, \mathcal{A}) = k\, S'(f, \mathcal{A}) \qquad S''(kf, \mathcal{A}) = k\, S''(f, \mathcal{A})$$

da cui si ha la tesi passando al sup

Se $k < 0$ allora $\sup\limits_{[x,y]} kf = k \inf\limits_{[x,y]} f$ allora

$$S'(kf, \mathcal{A}) = k\, S''(f, \mathcal{A}) \quad e \quad S''(kf, \mathcal{A}) = k\, S'(f, \mathcal{A})$$

e quindi ....

$\boxtimes$

Osservazione: Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile e non negativa, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Infatti se $f \geq 0$ e $A = \{a, b\}$ si ha che $\inf_{[a,b]} f \geq 0$ e quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq s(f, A) = \left(\inf_{[a,b]} f\right)(b-a) \geq 0$$

Teorema (del confronto)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabili

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Dim: Siccome f e g sono integrabili, lo è anche la funzione $g-f$ che risulta non negativa. Quindi

$$\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0 \quad \text{Ma}$$

$$\int_a^b (g-f)(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$ (per la linearità dell'integrale)

Quindi $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ cioè

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile allora

1) f^+, f^- e $|f|$ sono R-integrabili 2) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

dim

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $\quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$ $\quad f(x) = f^+(x) + f^-(x)$

$|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$

$\sup\limits_{[x,y]} f^+ = \left[\sup\limits_{[x,y]} f\right]^+ \quad \inf f^+ = [\inf f]^+$

e dunque

$$\Delta S(f^+, A) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \left[[\sup f]^+ - [\inf f]^+ \right]$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left[\sup f - \inf f \right] \leq \Delta S(f, A)$$

quindi

Se f R-integrabile allora f^+, f^- R-integrabili

allora $|f| = f^+ - f^-$ R-integrabile

Essendo

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b f(x) dx$$

$\boxed{///}$

Oss $|f|$ R-integrabile $\not\Rightarrow$ f R-integrabile

Esempio $f = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \frac{1}{2} & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

non è integrabile, in quanto

$$f(x) = (\text{f.ne Dirichlet}) - \frac{1}{2} \quad !$$

Ma $|f|(x) = \frac{1}{2}$ che è costante e quindi integrabile.

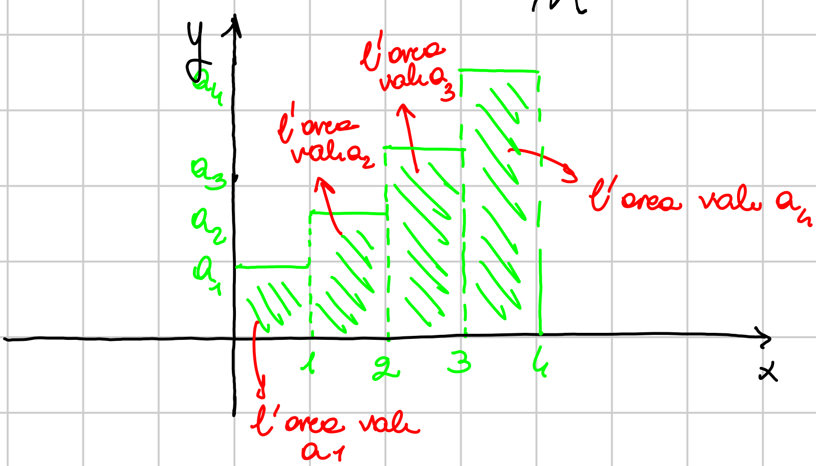
Def $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrabile, diciamo "media (integrale) di f su $[a,b]$" la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Oss Generalizza la media aritmetica $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$!!

Infatti consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & x \in [0,1) \\ a_2 & x \in [1,2) \\ \vdots & \\ a_j & x \in [j-1, j) \\ \vdots & \\ a_n & x \in [n-1, n] \end{cases}$$



Quindi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$

Teorema (della Media Integrale)

1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-Integrabile allora

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua (e dunque R-Integrabile)

allora $\exists\, z\in[a,b]$ t.c. $f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

dim

1) banalmente

$$S'(f,A)\le\int_a^b f(x)\,dx \le S''(f,A) \quad \text{dove } A=\{a,b\}$$

e $S'(f,A)=\left(\inf_{[a,b]} f\right)(b-a)$ $\quad S''(f,A)=\left(\sup_{[a,b]} f\right)(b-a)$

Quindi

$$\left(\inf_{[a,b]} f\right)(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le\left(\sup_{[a,b]} f\right)(b-a)$$

Dividendo per b-a si ottiene la Tesi.

2) Essendo f continua, si ha

$$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]} f$$

e per il Teorema dei valori intermedi $\exists\, z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema (di Chasles o di spezzamento)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ R-Integrabile e $a<c<b$

Allora

1) f R-Integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(NO DIM)!!!

Integrale su intervallo orientato

Def $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile, definiamo

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

Poniamo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Osserviamo che con questa nuova definizione di integrale definito su intervallo orientato continuano a valere tutti i teoremi dimostrati

ANZI, il teorema di spezzamento vale $\forall c \in \mathbb{R}$ (non deve essere compreso tra a e b)

ma però f deve essere R-Int. su $[a,c]$, R-Int su $[c,b]$

UNICO NEO il teorema del confronte, che è inalterato se in $\int_a^b f\,dx$ si ha $a<b$

mentre si ha che

" $f \leq g$ in $[a,b] \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx \geq \int_b^a g(x)\,dx$ "

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Teorema</u> (Fondamentale del Calcolo Integrale)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo.

Definire $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, dove $a \in I$

allora $F(x)$ è una primitiva di f

<u>Oss.</u> ① Questo Teorema ci mostra come "costruire" la primitiva di una $\forall$ funz continua

② Al variare di $a \in I$, trovo ∞ primitive tutte $\neq$ tra loro

La cosa deve sorprendere ??

<u>dim</u> preso un $\forall x_0 \in I$ $\quad$ $\$$ $F'(x_0) = f(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

Teorema spezzamento $\longrightarrow$ $= \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}$

Teorema media integrale

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(z(x))$$

dove $z(x)$ è un punto compreso tra x_0 e x.

Ma quando $x \to x_0$ si ha che $z(x) \to x_0$

dunque

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{z \to x_0} f(z) = f(x_0)$$

$\boxed{\cancel{\text{Rap}}}$

Teorema (di Torricelli)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, sia $a \in I$ e

sia $G(x)$ una qualsiasi primitiva di f

Allora

1) $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$

2) $\forall \alpha, \beta \in I$ $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$

dim

1) Il Teorema fondamentale del Calcolo Int dice

che $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ è una primitiva di f

per Hp. $G(x)$ " " " " "

due primitive di f differiscono per una costante

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$

2) $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_a^\beta f(t)\,dt$ x Thm spezzamento

$= \int_a^\beta f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt$ x definizione integrale su intervallo orientato

$= F(\beta) - F(\alpha)$ essendo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$= \left(F(\beta) + c\right) - \left(F(\alpha) + c\right)$

$= G(\beta) - G(\alpha)$ essendo $G = F + c$

$\cancel{\boxed{F(\beta)}}$

__Esempio__ calcolare $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

Determiniamo una primitiva di $\sin^2 x$. Si ha

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \sin x\,dx = -\cos x \sin x - \int (-\cos x)\cos x\,dx$$

$$= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx + c$$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria

Quindi

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(-\sin x\cos x + x + c\right) = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2} + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ al}$$

variare di $c \in \mathbb{R}$ (NOTA: siccome c è una costante reale arbitraria, scrivere c o $c/2$ è lo stesso!!!)

Quindi come primitiva di $\sin^2 x$ possiamo prendere $-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}$

Dal teorema di Torricelli deduciamo che

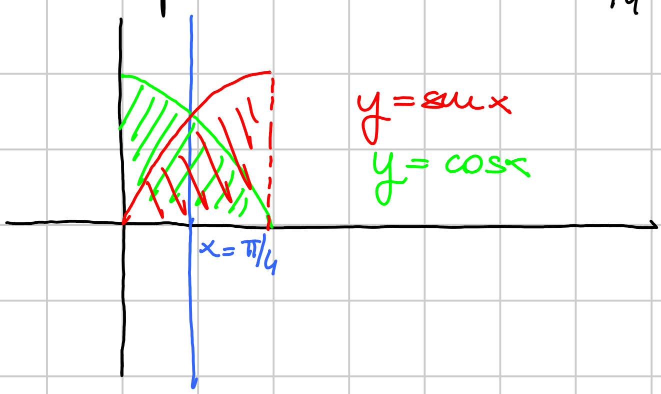
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin(0)\cos(0) = \frac{\pi}{4}$$

Per calcolare $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ si possono svolgere conti analoghi ai precedenti o, più semplicemente, osservare che

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\, dx \underset{\text{linearità dell'integrale}}{=} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Abbiamo provato che $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$. Questo non deve sorprendere ma confermare che l'integrale di Riemann è una buona definizione di area. Infatti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sin x\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le \cos x\}$ si ottengono l'uno dall'altro con una simmetria rispetto alla retta $x = \pi/4$



Esercizio Calcolare la derivata prima della funzione

$$G(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos(t)\, dt$$

- Un modo (difficile!!) è calcolare una primitiva di $\cos t$, ovvero $\operatorname{sen} t$ e poi calcolare

$$G(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos t\, dt = \Big[\operatorname{sen} t\Big]_0^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

$$G'(x) = \big(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\big)' = \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$$

- Un modo semplice $G(x) = (F \circ h)(x)$

dove $x \xrightarrow{h} \operatorname{sen} x \xrightarrow{F} \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos(t)\, dt$

dove $h(x) = \operatorname{sen} x$ e $F(y) = \int_0^{y} \cos(t)\, dt$

$h'(x) = \cos x$ e $F'(y) = \cos(y)$

dunque $G'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x)$

$= \cos(h(x)) \cdot \cos x$

$= \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$

Esempio calcolare $G'(x)$ dove $G(x) = \int_{x^3}^{2} e^{t^2} dt$

La funzione G è data dalla composizione delle funzioni $F(x) = \int_x^2 e^{t^2} dt$ e $\varphi(x) = x^3$, cioè $G(x) = (F \circ \varphi)(x)$

Quindi

$$G'(x) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

Ora

$$\varphi'(x) = 3x^2 \qquad F'(x) = \frac{d}{dx}\int_x^2 e^{t^2} dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_2^x e^{t^2} dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_2^x e^{t^2} dt$$

$$= -e^{x^2}$$

Quindi

$$G'(x) = -e^{(x^3)^2}(3x^2) = -3x^2 e^{x^6} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO Calcolare $G'(x)$ quando $G(x) = \int_{x^3}^{\sin x} e^{t^2} dt$

É comodo usare il Thm di spezzamento e scrivere

$$G(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt + \int_{x^3}^{0} e^{t^2} dt = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt - \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$$

Quindi

$$G'(x) = e^{(\sin x)^2} \cos x - e^{x^6}\, 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Avremmo anche potuto decidere di spezzare l'integrale in un a qualsiasi $a \in \mathbb{R}$: non sarebbe cambiato nulla)

ESERCIZIO: Calcolare le primitive di $\frac{1}{1+x^3}$ in $(-1,+\infty)$

Osserviamo che $1+x^3=(1+x)\underbrace{(1-x+x^2)}_{\text{non ha radici reali}}$

Quindi decomponiamo $\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}$

Deve essere $\frac{1}{1+x^3}=\frac{A(1-x+x^2)+(1+x)(Bx+C)}{1+x^3}$ cioè

$$1=A(1-x+x^2)+(1+x)(Bx+C)=A-Ax+Ax^2+Bx+C+Bx^2+Cx$$
$$=(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C$$

Quindi
$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

ovvero
$$\begin{cases} B=-A \\ -2A+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=2A \\ 3A=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=2/3 \end{cases}$$

Quindi $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{2-x}{1-x+x^2}$

Quindi
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2-x}{1-x+x^2}\,dx$$

Ora
$$\int\frac{1}{1+x}\,dx=\log|x+1|+c$$

$$\int\frac{2-x}{1-x+x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1-3}{1-x+x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx-3\int\frac{1}{1-x+x^2}\,dx\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\log|x^2-x+1|-3\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\right)_{y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

$\forall x > -1$ al variare di $c \in \mathbb{R}$

Quindi tutte e sole le primitive di $\frac{1}{1+x^3}$ su $(-1,+\infty)$ sono le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + c \quad \forall x > -1$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$

L' insieme più grande su cui esistono le primitive della fz $\frac{1}{1+x^3}$ è $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. In tale insieme le primitive sono tutte e sole le funzioni

$$\frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \begin{cases} c & x < -1 \\ d & x > -1 \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO: Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx$

x^4+1 non ha radici reali. Le sue radici sono le radici quarte di -1

Dobbiamo quindi scomporre x^4+1 nel prodotto di 2 polinomi di secondo grado.

Primo metodo: Scriviamo $x^4+1 = (x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D)$

Abbiamo

$$(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D) = x^4+Cx^3+Dx^2+Ax^3+ACx^2+ADx+Bx^2+BCx+BD$$
$$= x^4+(C+A)x^3+(D+AC+B)x^2+(AD+BC)x+BD$$

Quindi

$$\begin{cases} C+A=0 \\ D+AC+B=0 \\ AD+BC=0 \\ BD=1 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ D-A^2+B=0 \\ AD-AB=0 \\ BD=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A(D-B)=0 \\ C=-A \\ D-A^2+B=0 \\ BD=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ D+B=0 \\ BD=1 \end{cases} \vee \begin{cases} B=D \\ C=-A \\ 2B-A^2=0 \\ B^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ D=-B \\ -B^2=1 \end{cases} \text{ impossibile!!!}$$

$$\begin{cases} B=\pm 1 \\ D=\pm 1 \\ A^2=2B \\ C=-A \end{cases} \iff \begin{cases} B=1 \\ D=1 \\ A^2=2 \\ C=-A \end{cases} \iff \begin{cases} A=\pm\sqrt{2} \\ B=1 \\ C=\mp\sqrt{2} \\ D=1 \end{cases}$$

$B=-1$ porterebbe a $A^2=-1$ che non ha sol.

Quindi $1+x^4 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

Secondo metodo: Determiniamo le radici quarte di -1: $x^4=-1=e^{i\pi}$

Quindi

$$x_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = e^{i3/4\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_2 = e^{i5/4\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi

$$x^4+1 = \underbrace{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{} \underbrace{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{}$$

$$= x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\cancel{\frac{i\sqrt{2}}{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{i}{2}}$$
$$-\cancel{i\frac{\sqrt{2}}{2}x}-\cancel{\frac{i}{2}}+\frac{1}{2}$$
$$= x^2-\sqrt{2}x+1$$

$$= x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x-\cancel{\frac{i\sqrt{2}}{2}x}+\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{i}{2}}$$
$$+\cancel{i\frac{\sqrt{2}}{2}x}+\cancel{\frac{i}{2}}+\frac{1}{2}$$
$$= x^2+\sqrt{2}x+1$$

Possiamo quindi decomporre

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

cioè $1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ ovvero

$$1 = Ax^3 + \sqrt{2}Ax^2 + Ax + Bx^2 + \sqrt{2}Bx + B + Cx^3 - \sqrt{2}Cx^2 + Cx + Dx^2 - \sqrt{2}Dx + D$$

che conduce al sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ 2\sqrt{2}A+1=0 \\ \sqrt{2}B-\sqrt{2}+\sqrt{2}B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ D=1-B \\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=1/2 \\ C=1/2\sqrt{2} \\ D=1/2 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Pertanto

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{-\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}+x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(2+\sqrt{2})$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{y^2+\frac{1}{2}}\,dy + \frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+1}\,dy + \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(\sqrt{2}y)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{z^2+1}\,dz + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(z)\Big|_{-1}^{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(z)\Big|_{1}^{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) \cancel{- \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(-1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$$

$$\cancel{- \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(1)}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(3+2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{16\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$