Riepilogo 3

Titolo nota 19/01/2011

Proviamo che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa

allora $\forall x_0 \in [a,b]$ $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \nearrow$

dim

$$x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_0)\left[(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)\right] - f(x_1)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) + f(x_0)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{-f(x_2)(x_0-x_1) - f(x_1)(x_2-x_0) + f(x_0)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$= \frac{\overset{>0}{(x_2-x_1)}}{\underset{>0}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}} \cdot \underbrace{\left[f(x_0) - f(x_2)\cdot\underbrace{\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}} - f(x_1)\underbrace{\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}}\right]}_{\geq 0}$$

$$\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} + \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} = 1$$

$$x_1 \cdot \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} + x_2\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x_1\cancel{x_2} - x_1x_0 + x_2x_0 - x_1\cancel{x_2}}{(x_2-x_1)}$$

$$= x_0$$

<u>f convexe</u> : $f(x_0) = f\left(x_1 \overbrace{\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}}^{\lambda} + x_2 \overbrace{\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}}^{1-\lambda}\right)$

$$f(x_0) \overset{f \text{ convexe}}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$f(x_0) \leq \frac{x_2-x_0}{x_2-1} f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\cdot f(x_2)$$

$$\underbrace{\left[f(x_0) - f(x_2)\,\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} - f(x_1)\,\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \right]}_{B} \boxed{\leq 0}$$

$$A:\quad \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)} \leq 0$$

$$A \cdot B \geq 0$$

$$F(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad !!$$

Teorema (B.W.)

Se $\{a_n\}_n$ è una successione di numeri reali limitata

Allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione convergente

(1) esistono successioni illimitate aventi sottosuccessioni convergenti

Esempio $a_n = \begin{cases} n & n \text{ pari} \\ 1/n & n \text{ dispari} \end{cases}$

(2) $\nexists$ nessuna sottosuccessione convergente di a_n

allora a_n è illimitata VERO

Corollario del Thm di Bolzano Weierstrass:

Teorema (di Weierstrass)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\text{continua}}}$, $[a,b]$ chiuso e limitato

Allora $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$: $f(x_m) = \min\limits_{[a,b]} f = \min f([a,b])$

$$f(x_M) = \max_{[a,b]} f = \max f([a,b])$$

<u>dim</u>

Proviamo $\exists$ min

Essendo $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$, $f([a,b]) \neq \emptyset$, esiste $\xi = \inf f([a,b])$

Tesi: $\xi = \min f([a,b])$

Se $\xi \in f([a,b])$, la tesi è provata

Se $\xi \notin f([a,b])$, allora ξ è p.d.a. per $f([a,b])$

allora $\exists \{y_n\} \subset f([a,b])$ $y_n \to \xi$

allora $\exists\, x_n \subseteq [a,b]$: $f(x_n) = y_n \to \xi$

Ma $\{x_n\} \subset [a,b]$ allora (Thm BW) $\exists\, x_{k_n} \to x_m \in [a,b]$

Ma ora

$$f(x_n) \to \xi \implies f(x_{k_n}) \to \xi \quad \left(\text{è una sottosuccessione}\right)$$

$$x_{k_n} \to x_m \implies f(x_{k_n}) \to f(x_m) \quad \left(f \text{ è continua in } x_m\right)$$

Ne segue che $\xi = f(x_m) \in f([a,b])$

ovvero $\xi = \min f([a,b])$ $\square$

Nella dim del Teorema di Bolzano Weierstrass è il seguente risultato

Lemma

Data una successione $\{x_n\}_n$, esiste una sua estratta $\{x_{k_n}\}_n$ monotona

Teorema (BW)

Se $\{a_n\}_n \subseteq [a,b]$ allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ convergente e un punto di $[a,b]$

dim

Per il lemma, data $\{a_n\}_n$ esiste una sua sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ monotona

Supponiamo $\{a_{k_n}\}_n \nearrow^{=}$

Ma una successione monotona crescente ha limite, e si ha $\lim_n a_{k_n} = \sup_n a_{k_n}$

Essendo $\{a_n\}_n$ limitata, anche $\{a_{k_n}\}$ sarà limitata e dunque $\sup_n a_{k_n} \in [a,b]$

Ne segue che $\exists \lim_n a_{k_n} = \bar{x} \in [a,b]$ $\blacksquare$

Pb $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.

$f(0)=1 \qquad f'(0)=f''(0)=0 \qquad f'''(0)<0$

Allora

① $f(-\frac{1}{2})>1$

② $f(\frac{1}{2})<1$

FALSE

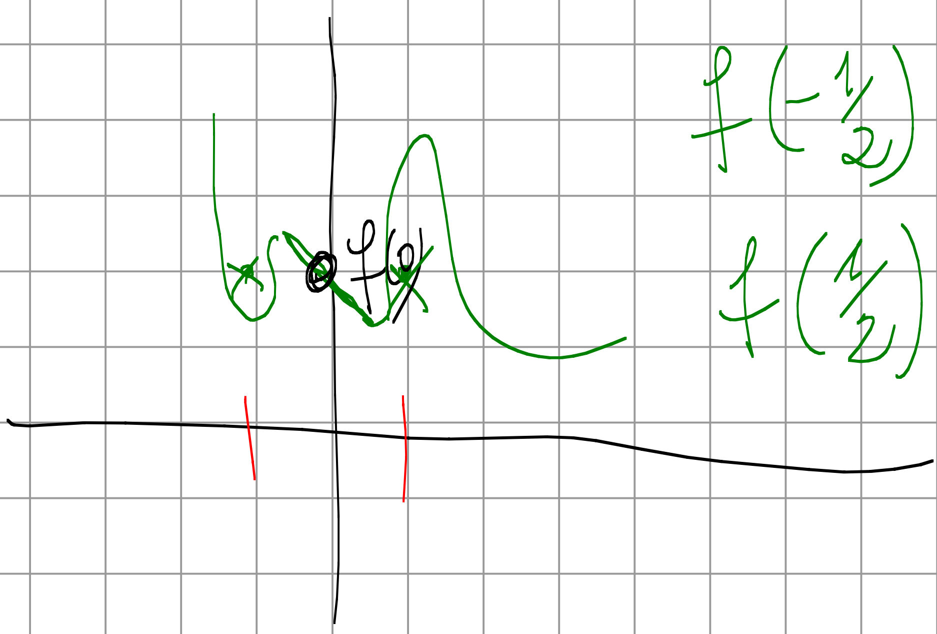
$f(0)=1 \quad f'(0)=f''(0)=0$

$f'''(0)<0$

③ $\exists\, U\in\mathcal{U}_0 : f(x) > \underset{f(0)}{1} \quad \forall x\in U$ (?)

FALSA

④ Nessuna delle altre risposte è vera



$f(-\frac{1}{2})<1$

$f(\frac{1}{2})>1$

Teorema

FALSO

Se $\nexists \min_A f$ $\nexists \max_A f$

allora f non è continua su A

Infatti $f(x) = x$ $f: \underbrace{]0,1[}_{A} \to \mathbb{R}$

$\nexists \min_A f$ $\nexists \max_A f$ però f continua

Teorema (vero)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$: $\nexists \min_{[a,b]} f$ $\nexists \max_{[a,b]} f$

allora f non è continua su tutto $[a,b]$

$\{a_n\}$ monotona $\Longrightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ convergente : V o F

$a_n = n \longrightarrow +\infty$ $\quad \forall\, a_{k_n} \longrightarrow +\infty$

è monot. $\nearrow$

$\forall \{a_{k_n}\}$ $\quad a_{k_n} \not\longrightarrow \quad \Longrightarrow a_n$ non è limitata VERO

(contronominale di BW)

$A \Longrightarrow B$ vero : $\cancel{\Longleftrightarrow}$ $\quad$ non $A \Longrightarrow$ non B vero

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

non $B \Longrightarrow$ non A vero $\qquad\qquad$ $B \Longrightarrow A$ vero