(19) Se la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente, allora

(A) la successione $\{a_n\}_n$ ha limite per $n \to +\infty$.

(B) può succedere che $a_n < 0$ per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$.

(C) la successione $\{a_n\}_n$ non può essere infinitesima.

(D) la successione $\{a_n\}_n$ è crescente.

↑ B è vera

(A) è falsa : $a_n = \begin{cases} n & n \text{ è pari} \\ 0 & n \text{ è dispari} \end{cases}$ $\sum a_n = +\infty$ ma $a_n \not\to$

(B) è vera : ad esempio presa $a_n = \begin{cases} n & n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$ si ha che $\sum_n a_n = +\infty$ ed $\exists\ \infty$ indici t.c. $a_n < 0$

(C) è falsa : $a_n = 1/n \to 0$ ma $\sum_n 1/n = +\infty$

(D) è falsa : (vedi C)

(20) Un bimbo ha sette dischi di grandezze tutte differenti, forati al centro, e una tavoletta con due pioli, uno rosso e uno verde, sui quali infila i dischi a casaccio. Quante configurazioni diverse può ottenere?

(A) $8!$

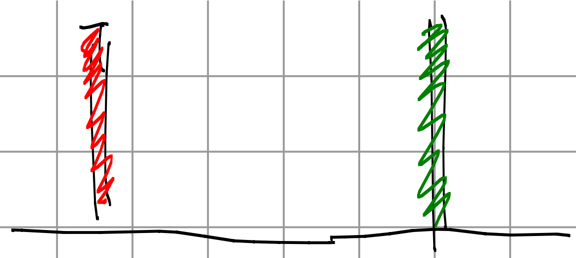
(B) 2^7

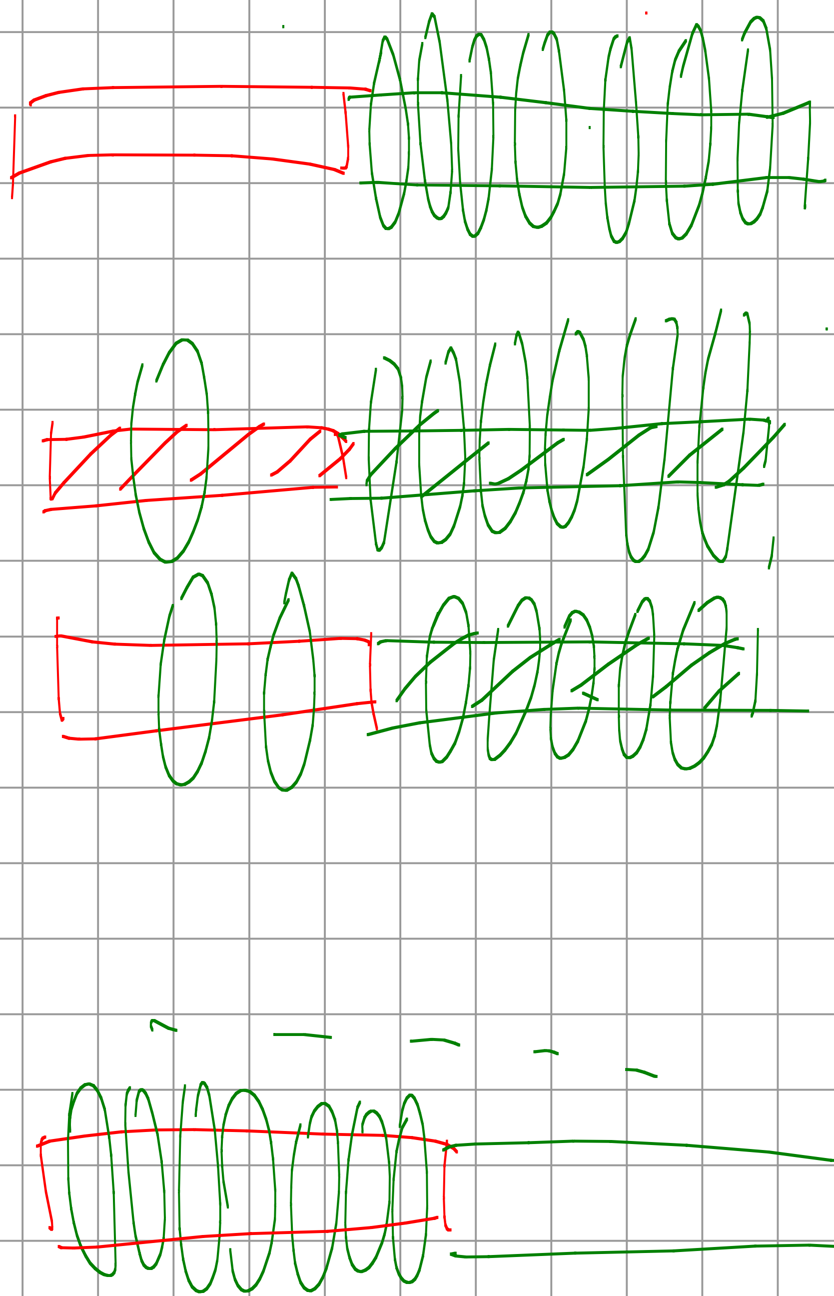
(C) $7!$

(D) $4! \cdot 3!$

Se li metto tutti sul rosso → 7!

" " " " " verde → 7!





$$\left.\begin{array}{l} 7! \\ + \\ 7! \\ + \\ 7! \\ + \\ \ldots \end{array}\right\} 8 \text{ volte}$$

$+ \; 7$

(21) Se una funzione f ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor può essere

(A) $f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$.

(B) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$.

(C) $f(x) = 1 - 5x^2 + o(x^2)$.

(D) $f(x) = -3 + 2x^4 + o(x^4)$. ← Vero (D)

Supponiamo che f abbia un punto di minimo in $x_0=0$ e sia derivabile q.b.

In tal caso si ha che $\exists\, U \in \mathcal{U}_0$ t.e.

$f(0) = \min_U f$, $f'(0)=0$ e $f''(0) \geq 0$

B è falsa : banalmente in quanto $f'(0) \neq 0$

C è falsa : " " " $f''(0) < 0$

A è falsa : infatti, dovendo essere

$f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$, questo è incompatibile

con $f(0) = 1 = (\min f \text{ locale})$ Infatti

$1 = f(0) \leq 1 + 3x^3 + o(x^3) \quad x \to 0 \iff 3x^3 + o(x^3) \geq 0$
$x \to 0$

$\Longleftrightarrow \quad 3x^3 \geq o(x^3) \quad x \to 0$

ma questo è impossibile poiché implica

$[x \to 0^+ \quad 3 \geq o(1)]$ & $[x \to 0^- \quad 3 \leq o(1)]$!!

(d) è vera: $f(x) = -1 + x^4 + o(x^4) \quad x \to 0$

In tal caso $f(0) = -1$ è il minimo relativo

e si ha che $f(x) = -1 + x^4 + o(x^4) \geq -1 = f(0)$

$(x \to 0)$

$$f(x) = -1 + x^4 + o(x^4) > -1 \qquad x \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4 + o(x^4) > 0 \qquad \begin{matrix} x \to 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4 > o(x^4) \qquad \begin{matrix} x \to 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 > o(1) \qquad \begin{matrix} x \to 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

che è vera

Pb $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(50)}(0) = 0$$

$$1 = f^{(51)}(0) > 0$$

Allora $x_0 = 0$ è punto di max o min o niente?

$$\sum_{k=0}^{51} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = P_{51}(x) = \frac{x^{51}}{51!}$$

$$f(x) = \frac{x^{51}}{51!} + o(x^{51})$$

non è né max né minimo

Pb $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f(0)=1 \quad f'(0) = \cdots = f^{(39)}(0) = 0$

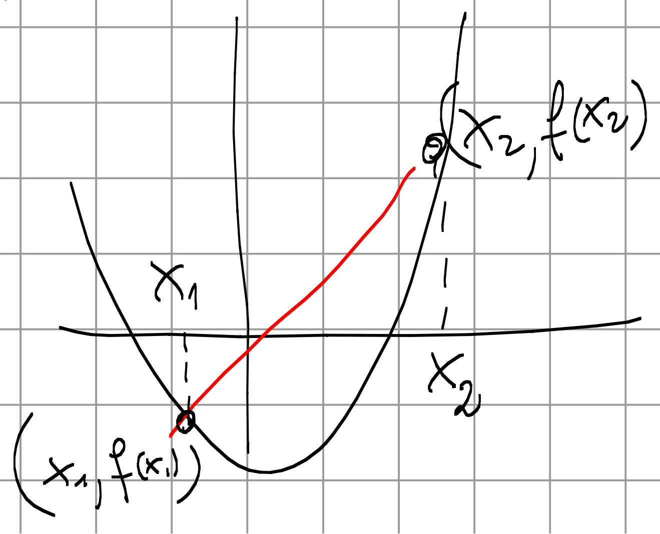
$f^{(40)} = -3$

Allora $x_0 = 0$ è punto di massimo relativo

Infatti $P_{40}(x) = 1 - \frac{3}{40!} x^{40}$

$$f(x) = 1 - \frac{3}{40!} x^{40} + o(x^{40}) \qquad x \to 0$$

Convessità



$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Def $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa su I

se $\forall x_1, x_2 \in I$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\forall x \in [x_1, x_2]$$

Def $f: I \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ convessa

Def x_0 è un punto di flesso se in x_0 la f.ne f cambia da concava a convessa e viceversa (se $f \in C^2$ sono i punti t.c. $f''=0$)

Pb f convessa su $I \Rightarrow f$ derivabile 2 volte in I

NO $f(x)=|x|$ è convessa su $\mathbb{R}$

ma non è derivabile in $x_0 = 0$

Però è continua ....

Teorema $f : I \to \mathbb{R}$ convessa su I

allora $$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ è crescente

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Oss è un ~~se~~

f convessa su I ~~se~~ $\forall x_0$ $F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è crescente $\forall x \neq x_0$

dim $\nexists$ $x_1 < x_2$ allora $F(x_1) \leq F(x_2)$

$\nexists$ $x_1 < x_2$ $F(x_1) - F(x_2) \leq 0$

Supponiamo che $x_1 < x_0 < x_2$

$$F(x_1) - F(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_0)[x_1 - \cancel{x_0} - x_2 + \cancel{x_0}] - f(x_2)(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_2)(x_0 - x_1) - f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

$$= \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}}_{\substack{\wedge \\ 0}\ (1)} \cdot \underbrace{\left\{ f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} - f(x_0) \right\}}_{\substack{\vee\!\!\mid \\ 0}\ (2)}$$

da cui segue che $F(x_1) - F(x_2) \leq 0$

(1) ≤ 0 ovvio: $x_1 < x_0 < x_2$

(2) ≥ 0 $\quad f(x_0) = f\left(x_1 \underbrace{\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}}_{\lambda} + x_2 \underbrace{\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}}_{1-\lambda}\right) \qquad \lambda + (1 - \lambda) = 1$

$$\leq f(x_1)\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$$

essendo f convessa!

Ora si dovrebbe provare $F(x_1)-F(x_2)\le 0$

anche nei casi $x_1<x_2<x_0$ & $x_0<x_1<x_2$

per concludere. Si noti che in realtà

si è provato f convessa se $F(x)\nearrow$ $\square$

Teorema (Corollario del precedente)

$f: I\to\mathbb{R}$ convessa $\Longrightarrow \forall x_0\in I\setminus\partial(I)$

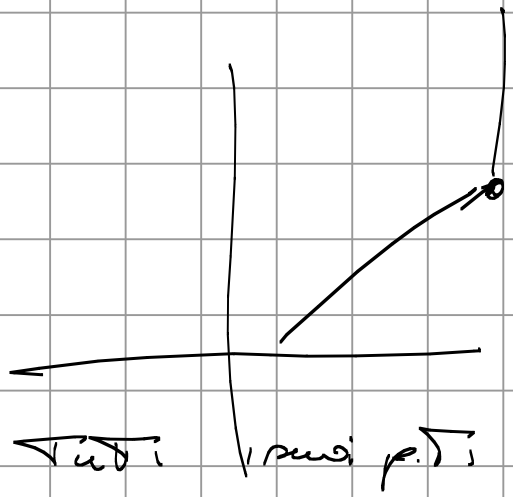
$\exists\ f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$

<u>dim</u>

Essendo $F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\nearrow$, si ha

che $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = f'_+(x_0)$

come pure $\exists \lim\limits_{x\to x_0^-} F(x) = f'_-(x_0)$ $\square$



Oss può accadere

ovvero non è detto che
f convessa sia derivabile in tutti i suoi p.ti interni

Corollario $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa

allora $f: I \to \mathbb{R}$ è continua $\forall x \in \mathring{I}$

dim

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\quad$ $\exists$ equiv. $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$

x il corollario precedente

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)$$

$$=\text{finito}\cdot\text{infinitesimo}=0$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\left(f(x)-f(x_0)\right)\ ----\ =0$$

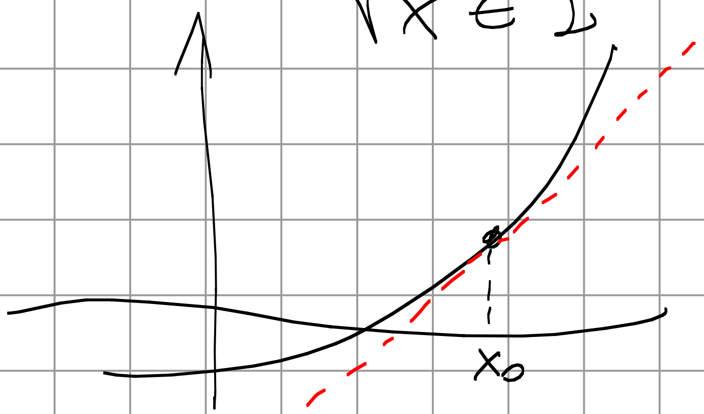
ma allora $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ $\blacksquare$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I `$f(I)$ e convessa

allora $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\forall x \in I$



$\forall x > x_0$, essendo

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \nearrow \,,$$

si ha che

f deriv.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \lim_{x \to x_0^+} \cdots = f'(x_0)$$

e dunque $\quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$

" " $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Analogamente, se $x < x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

e dunque $\quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x < x_0$

" " $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x < x_0$

Teorema (corollario del precedente)

$f: I \to \mathbb{R}$ convessa

di classe $C^1(I)$ allora $f'(x) \nearrow = \quad \forall x \in I$

dim

$x_1 < x_2 \quad \overline{\text{TS}} \quad f'(x_1) \leq f'(x_2)$

Preso $x_0 \in]x_1, x_2[$ si ha

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} & & \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \\ \vee\!/ & & \shortparallel \\ \lim_{x_0 \to x_1^+}\left[\quad\right] & & \frac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2} \\ \shortparallel & & \wedge\!\backslash \\ f'(x_1) & & \lim_{x_0 \to x_2^-}\left[\quad\right] = f'(x_2) \end{array}$$

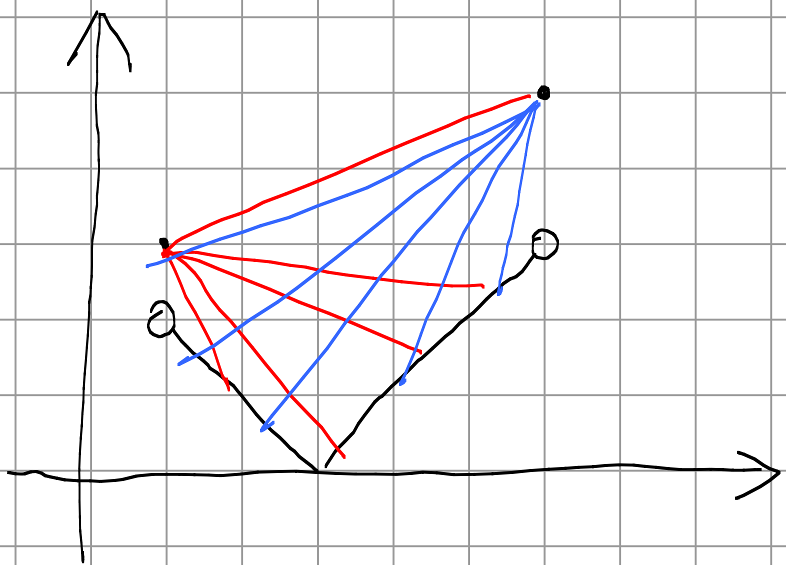
$\blacksquare$

Teorema.

$f: I \to \mathbb{R}$ di classe C^2

f convessa su I <u>sse</u> $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$

Vediamo un esempio di funzione convessa che non è continua negli estremi



$$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ 3 - x & 1 < x < 3 \\ x - 3 & 3 \leq x < 6 \\ 5 & x = 6 \end{cases}$$