(1) Se $z = (\sqrt{3} - \mathrm{i})^8$, allora

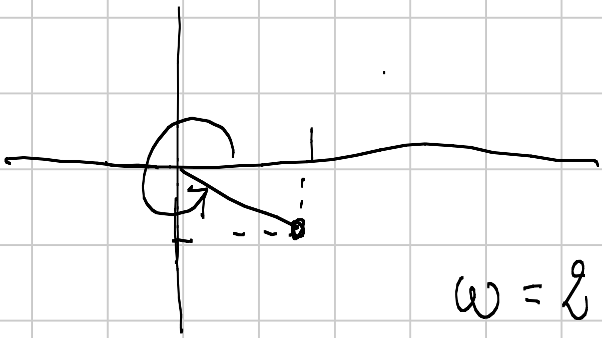
(A) $z = 2^7(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)$. ← A ok

(B) $z = 2^6(-\mathrm{i}\sqrt{3} + 1)$.

(C) $z = 2^8(\sqrt{3} - \mathrm{i})$.

(D) nessuna delle altre risposte è vera.

$$\omega = (\sqrt{3} - i) \qquad |\omega| = \sqrt{3+1} = 2$$



$$\arg \omega = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

$$\omega = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

$$z = \omega^8 = 2^8 \cdot \left(\cos\left(\frac{11}{6}\cdot 8\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{88}{6}\pi\right)\right)$$

$$\frac{\cancel{88}^{\,44}}{\cancel{6}_{\,3}}\pi = 14\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$\cos\left(\frac{88}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{88}{6}\pi\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 2^8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2^7\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}$$

(2) Cinque amici di altezze diverse si dispongono in fila a caso. Qual è la probabilità che risultino in ordine dal più basso al più alto?

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{5^5}$.

(C) $\frac{5}{5!}$.

(D) $\frac{1}{5!}$. D

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $5! = P_5$

$$\boxed{\frac{1}{5!}}$$

---

(3) Se la successione a_n non è debolmente crescente allora

(A) ha limite $-\infty$.

(B) esiste almeno un n per cui $a_n > a_{n+1}$.

(C) è monotona decrescente.

(D) non può essere monotona.

(B) è vera

a_n debolmente crescente $\Leftrightarrow$ $\forall n \quad a_n \leq a_{n+1}$

a_n non è " " $\Leftrightarrow$ $\exists n \quad a_n > a_{n+1}$

ne segue che la (B) è la risposta corretta

(a) NO : $a_n = \arctg(-n)$ che non è deb. crescente

ma $a_n \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$

(b) $\exists n : \quad a_n > a_{n+1}$ VERO

(infatti, [a_n deb. crescente $\Leftrightarrow$ ($\forall n \quad a_n \leq a_{n+1}$)])

(C) falso in quanto $a_n = \sin n$ è controesempio in quanto non è def. crescente, e non è monotona !!

(D) falso: presa $a_n = -\arctan n$ (che non è def. crescente), è monotona

(4) Qual è la probabilità di fare 3 al Superenalotto?

(A) $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot 84}{\binom{90}{6} \cdot 3!}$.

(B) $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{84}{3}}{\binom{90}{6}}$. ← B è vera

(C) $\dfrac{6! \cdot 3!}{90!}$.

(D) $\dfrac{84! \cdot 6! \cdot 3!}{\binom{90}{6}}$.

$\binom{90}{6}$ Sono tutte le sestine

$\binom{6}{3}$ Sono le terne vincenti (le devo fare a partire dalla sestina vincente)

$\binom{84}{3}$ Sono le terne non vincenti (quelle che devo aggiungere alla terna vincente vista prima

(5) Se $-5 \le a_n \le 3$ per ogni n, allora

(A) $a_n a_{n+1} \le 25$. ← A è vera

(B) $-5 \le |a_n| \le 3$.

(C) $\inf a_n = -5$.

(D) $\max a_n = 3$.

$$-5 \le a_n \le 3 \implies |a_n| \le \max\{|-5|, |3|\} = 5 \quad \forall n$$

$$|a_n \cdot a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot |a_{n+1}| \leq 25 \qquad \boxed{\text{Vera A}}$$

$$\text{VI}$$

$$a_n \cdot a_{n+1}$$

(b) falso se $a_n = -5 \ \forall n$, si ha $|a_n| = 5 > 3$

(c) falso se $a_n = 3 \ \forall n$, $\inf a_n = 3$

(d) falso se $a_n = 0 \ \forall n$ $\max a_n = 0 < 3$

(6) L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha \, dx}{\log(1+x^4)}$ è convergente

(A) se $\alpha < 0$.

(B) nessuna delle altre risposte è vera.

(C) se $\alpha > 3$. ← esatto

(D) se $3/2 \leq \alpha \leq 3$.

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ devo concentrarmi su un intorno di $x=0$

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\log(1+x^4)} \sim \frac{x^\alpha}{x^4} \quad (x \to 0)$$

$$\parallel$$

$$1/x^{4-\alpha} \quad (x \to 0)$$

$$\int_0^{10^{-100}} \frac{1}{x^{4-\alpha}}\,dx \quad \text{converge} \quad \underline{\text{se}} \quad 4-\alpha < 1$$

$$\underline{\text{se}} \quad 3 < \alpha$$

(7) Quale tra le seguenti proposizioni è vera?

(A) se f è derivabile su $]-1,1[$, allora f ha limite per $x \to -1^+$.

(B) se f è derivabile su $[-1,1]$, allora la sua derivata è continua su $[-1,1]$.

(C) se f è derivabile su $[-1,1]$, allora f ha massimo su $[-1,1]$.

(D) se f è derivabile su $[-1,1[$, allora f è limitata inferiormente.

C
è vera

f derivabile su $[-1,1] \Rightarrow f$ continua su $[-1,1]$

$$\Rightarrow \exists \max_{[-1,1]} f = f(x_M)$$

per il Teorema di Weierstrass

$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ in $]0,1[$ è derivabile

ma $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ $\Rightarrow$ (A) è falsa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x=0$

ma f' non è continua in $x=0$

$\Rightarrow$ (B) è FALSA

Prese $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, questa è derivabile su $[-1, 1[$

ma $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ (D) è falsa

(A) è vera $\quad A = \{x : f(x) \geq f(1)\}$ è chiuso e limitato, f continua

$\Rightarrow$ (Thm Weierstrass) $\quad \exists \max_A f = \max_{\mathbb{R}} f$

(8) La funzione $f(x) = \dfrac{3x}{e^x + 2}$ A corretta

C falsa $f(x) < 0 \; \forall x \leq 0$ e $f(0) = 0$ $\Rightarrow \max\limits_{]-\infty, 0]} f = f(0)$

(A) ha massimo su $]-\infty, +\infty[$

(B) non ha massimo perché il suo dominio non è un intervallo chiuso e limitato.

(C) non è limitata superiormente su $]-\infty, 0]$.

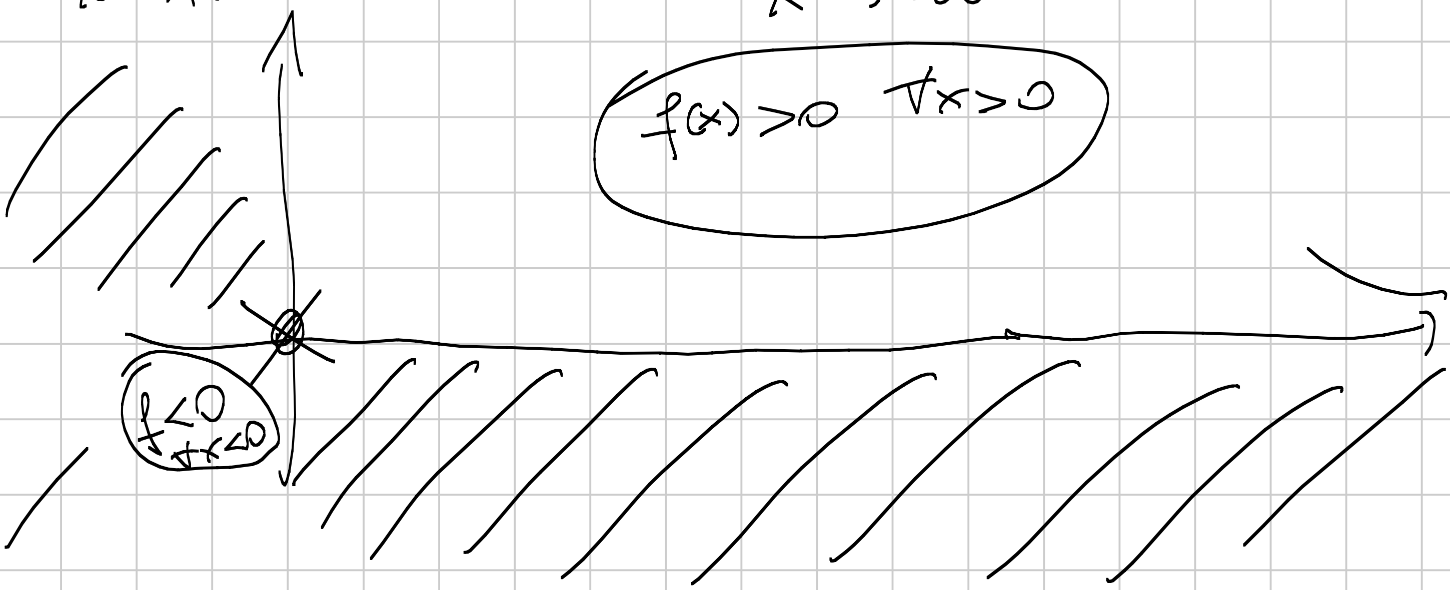
(D) è crescente perché lo sono numeratore e denominatore.

(B) è una proposizione falsa

(D) è una proposizione falsa

$f(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e continua e derivabile con f' conti

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad f(0) = 0$



$A = \{ x \; ; \; f(x) \geq f(1) = \dfrac{3}{e+2} \}$ è chiuso e limitato $\Rightarrow \exists \max f$ x il Thm Weierstrass su A

infatti, $f(0) = 0$, $f(x) > 0 \; \forall x > 0$ mentre $f(x) < 0 \; \forall x < 0$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Preso $\bar{x} : f(\bar{x}) < f(1)$, ovvero $\bar{x} \in \complement A$, per la continuità

di $f(x)$ fissato $\varepsilon = \dfrac{f(1) - f(\bar{x})}{2}$ $\exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta$ $\quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

ovvero $-\dfrac{f(1) - f(\bar{x})}{2} < f(x) - f(\bar{x}) < \dfrac{f(1) - f(\bar{x})}{2}$

da cui segue che $\forall x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$

$$f(x) - f(\bar{x}) < \frac{f(1)-f(\bar{x})}{2} < f(1) - f(\bar{x})$$

e quindi $\forall x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$

$$f(x) - \cancel{f(\bar{x})} < f(1) - \cancel{f(\bar{x})}$$

ovvero

$\exists \delta : \forall x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[\quad f(x) < f(1)$

Questo significa che $\complement A$ è aperto, ovvero A è chiuso

Inoltre A è limitato

Infatti, $A \subseteq]0, +\infty[$ (in $]-\infty, 0]$ $f(x) \leq 0$!) e

dovendo essere $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \forall x > b \qquad 0 < f(x) < \varepsilon$

e dunque, preso $\varepsilon = f(1)/2$, esiste $\bar{b}$:

$$\forall x \in]\bar{b}, +\infty[\qquad 0 < f(x) < \frac{f(1)}{2} \left(< f(1) \right)$$

e quindi $A \cap]\bar{b}, +\infty[= \emptyset$

e quindi $A \subset]0, \bar{b}] \Longrightarrow A$ è limitato

(B) è falsa: si prenda $f(x) = e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$: intervallo illimitato ma $\exists \max_{\mathbb{R}} f = 1 = f(0)$

(D) è falsa: $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)\cdot Q'(x)}{Q^2(x)}$ (*)

date $P(x)$ e $Q(x)$ $\nearrow$, ovvero $P'(x) > 0$ e $Q'(x) > 0$, non è detto

che (*) risulti positivo: Presi ad esempio

$P(x) = \log x$ $Q(x) = x$ $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) = 1 - \log x$

e dunque $\forall x > e$ $P(x)/Q(x)$ $\searrow$

(9) Se $f(x) = (x - \operatorname{sen} x)^2$ e $g(x) = x - \log(1 + x)$, allora per $x \to 0$

(A) f e g sono infinitesimi dello stesso ordine.

(B) f/g è infinitesimo di ordine 4.

(C) $f(x) + g(x) = o(x^2)$.

(D) $f(x)\, g(x) = o(x^8)$.

Vero

$$f(x) = \left(x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^7)$$

$$g(x) = x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f + g = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad f \cdot g = \frac{x^8}{72} + o(x^8)$$

(10) Le due radici dell'equazione $z^2 + 8iz - 187 = 0$

(A) sono immaginarie pure.

(B) hanno la stessa parte immaginaria.

(C) hanno la stessa parte reale.

(D) sono reali.

B vero

$$\frac{\Delta}{4} = -16 + 187 = 171 > 0$$

$$z_{1,2} = -4i \pm \sqrt{171}$$

(12) La funzione inversa di $f(x) = 3x + \cos x$

(A) non esiste perché $x \mapsto \cos x$ è periodica.

(B) è derivabile su $\mathbb{R}$.

(C) è $f^{-1}(y) = y/3 + \arccos y$.

(D) è $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3y + \cos y}$.

OK (A)

$f(x)$ è monotona? NO

qua $(f^{-1})'$ non esiste

$y = 3x + \cos x$ è una eq. trascendente in x, e non è risolubile

(13) Quale delle seguenti formule è vera?

(A) $\left[\binom{15}{3}\right]^{-1} = \binom{3}{15}$. Falso in modo evidente

(B) $12 \cdot \binom{15}{3} + 3\binom{15}{12} = 3 \cdot \binom{15}{3} + 12\binom{15}{12}$.

(C) $\binom{15}{2} = \frac{1}{2}\binom{15}{1}$.

(D) $\binom{15}{3} + \binom{15}{4} = \binom{15}{7}$.

x caso

(14) Sia data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua che soddisfa

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ :\ \forall x>\delta,\ 0<f(x)\le\varepsilon.$$

Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ ← vera

(B) f limitata.

↑ falsa $f=e^{-x}$!

(C) $\exists\overline{\varepsilon}>0,\ \overline{\delta}>0\ :\ f(x)\ge\overline{\varepsilon}\ \forall x\ge\overline{\delta}$. $\Leftarrow f(x)\ge\overline{\varepsilon}>0\ \forall x>\overline{\delta}$

(D) $\lim_{x\to+\infty} f(x)>0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+ \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathbb{R}\cap]\delta,+\infty[\quad 0<f(x)\le\varepsilon$$

$$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x>\delta\quad 0<f(x)\le\varepsilon$$

(D) $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=l>0$ ma questo implica

che $f(x)\ge \frac{l}{2}>0\quad \forall x>\delta$ opportuno

(15) Un polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ di $f(x)=e^x\operatorname{sen}x-x(1+x)$ è

(A) $-x^3/6$.

(B) $x^3/2$.

(C) $x^3/3$. ← OK

(D) $-x^2$.

per esso calcolare $P_3(x)$ con $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$

$f'''(0)$

$$f(x) = e^x \operatorname{sen} x - x - x^2$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$- x - x^2$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12}$$

$$+ o(x^3) - \cancel{x} - \cancel{x^2}$$

$$= \frac{3-1}{6} x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(16) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_n n^{2\alpha} e^{-n^2}$

(A) converge se e solo se $\alpha < -1/2$.

(B) converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. ← Vero

(C) ha come somma $2\alpha/e$.

(D) converge se e solo se $\alpha < 1/2$.

$$\lim \frac{n^{2\alpha} e^{-n^2}}{1/n^2} = \lim \frac{n^{2\alpha+2}}{e^{n^2}} = 0 \quad \forall \alpha$$

ma $\sum_n 1/n^2$ converge

$$\Rightarrow \sum_n n^{2\alpha} e^{-n^2} \text{ converge } \forall \alpha$$

oppure $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{24}}{e^{n^2}}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{24}}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

e quindi la Tesi segue dal criterio radice n-esima

(18) La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$. Allora

(A) f si annulla almeno tre volte. ← falso

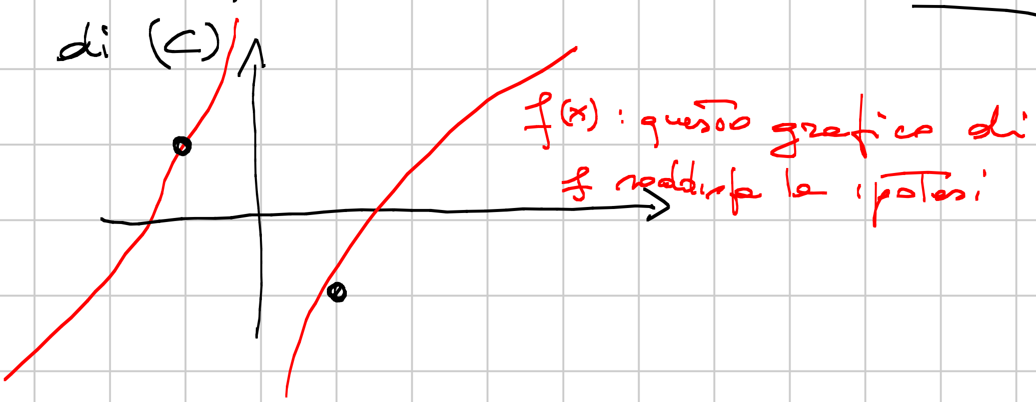
(B) nessuna delle altre risposte è corretta.

(C) f si annulla almeno due volte. ← Vera

(D) $f(c) = 0$ per qualche $c \in]-1,1[$. ← falso

(B) è falsa a causa di (C)

(A) è falsa



(C) è vera: f continua in $]-\infty, 0[$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ & $f(-1) > 0$

$\Rightarrow$ (Thm $\exists$ zeri) $\exists\, c^- : f(c^-) = 0$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \wedge$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0$

Analogamente si prova che $\exists\, c^+ > 0$

t.c. $f(c^+) = 0$

(d) è falsa: si vede il grafico disegnato in (A)