Integrali generalizzati (o impropri)

Titolo nota 05/01/2011

La teoria dell'integrazione secondo Riemann ha come obiettivo identificare la sottoclasse delle funzioni integrabili. Ad esempio

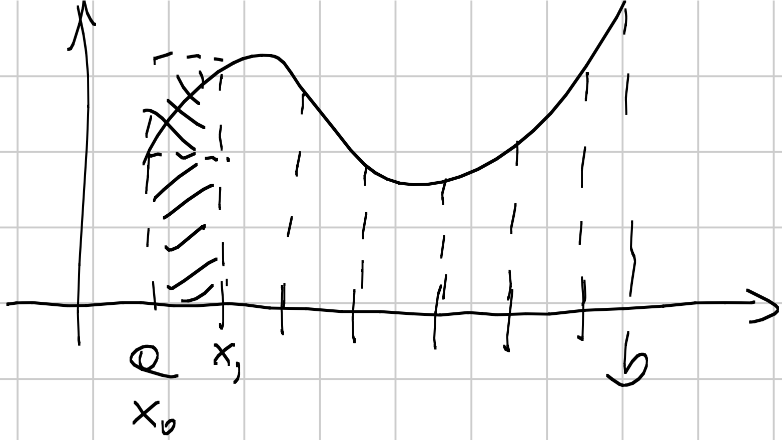
a) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>monotona</u> allora f è R-integrabile

b) " " " <u>continua</u> " " " "

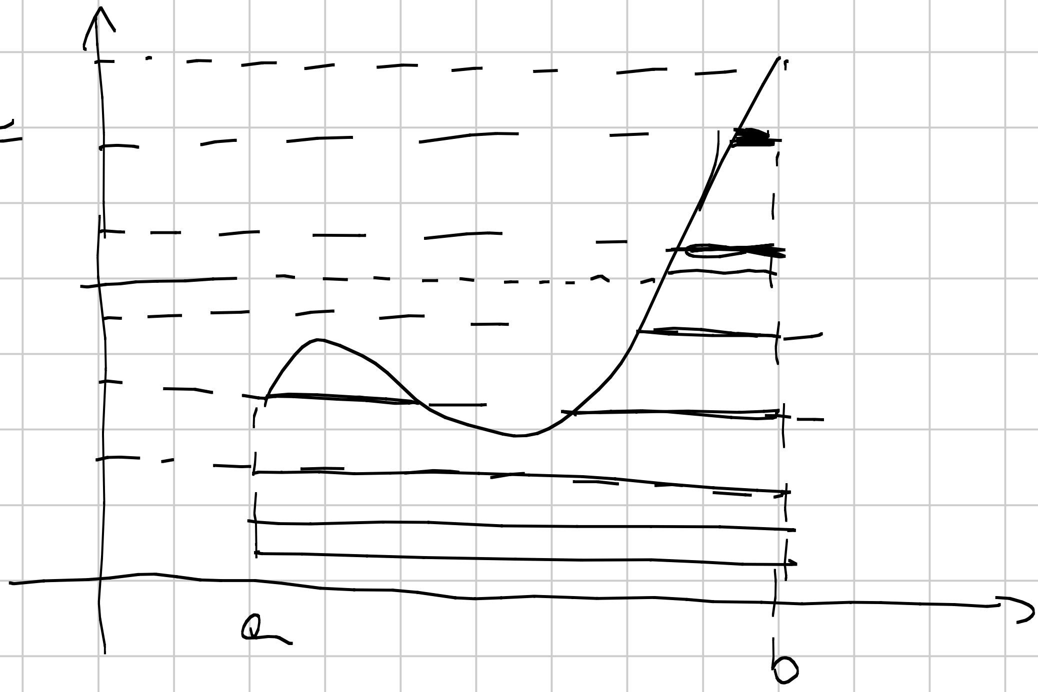
<u>Oss</u> UNIFORME CONTINUITÀ è INDISPENSABILE per provare che $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua è R-integrabile su $[a,b]$

<u>Teoria</u> dell'integrazione di Lebesgue

Riemann



Lebesgue



Idea di Riemann:

Calcolare $\sum_{i=0}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$ per approssimare l'integrale
(inf)

Idea di Lebesgue:

Introdurre una "misura (di Lebesgue)" per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, calcolare $m(\{x : f(x)=k\})$ e quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} m(\{x : f(x)=k\})\,dk$$

Nell'integrale di Riemann (quello proprio)

vengono prese in esame funzioni del seguente

tipo ;

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{limitate}$$

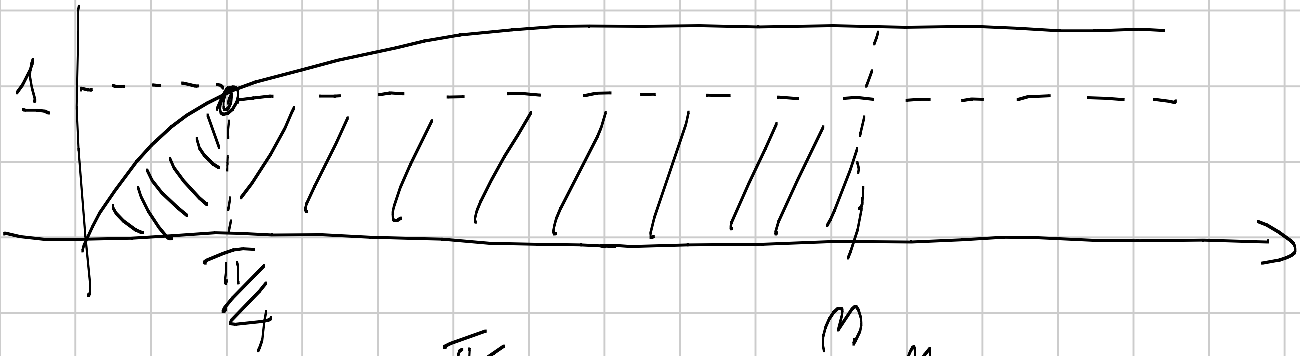
ovvero " $\underbrace{\text{f.ni limitate}}_{1}$ definite su $\underbrace{\text{intervalli limitati}}_{2}$ "

Non appena viene a mancare una delle due

ipotesi sulla funzione f, dobbiamo parlare di

Integrale Improprio

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} t \, dt = +\infty$



$$\int_0^M \operatorname{arctg} t \, dt = \int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} t \, dt + \int_{\pi/4}^M \operatorname{arctg} t \, dt$$

$$\geq \int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} t \, dt + \left(M - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1$$

$1 = \inf_{x \geq \pi/4} \operatorname{arctg} x$ (Teorema della media)

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \operatorname{arctg} t \, dt \geq \underbrace{\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} t \, dt}_{\text{numero finito}} + \lim_{M \to +\infty} \left(M - \frac{\pi}{4}\right) = +\infty$$

$\Downarrow$

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \operatorname{arctg} t \, dt = +\infty$$

Domanda: Questo esempio suggerisce qualcosa?

Esempio 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=\alpha}^{x=1}$$

$\forall \alpha > 0$, è un integrale proprio

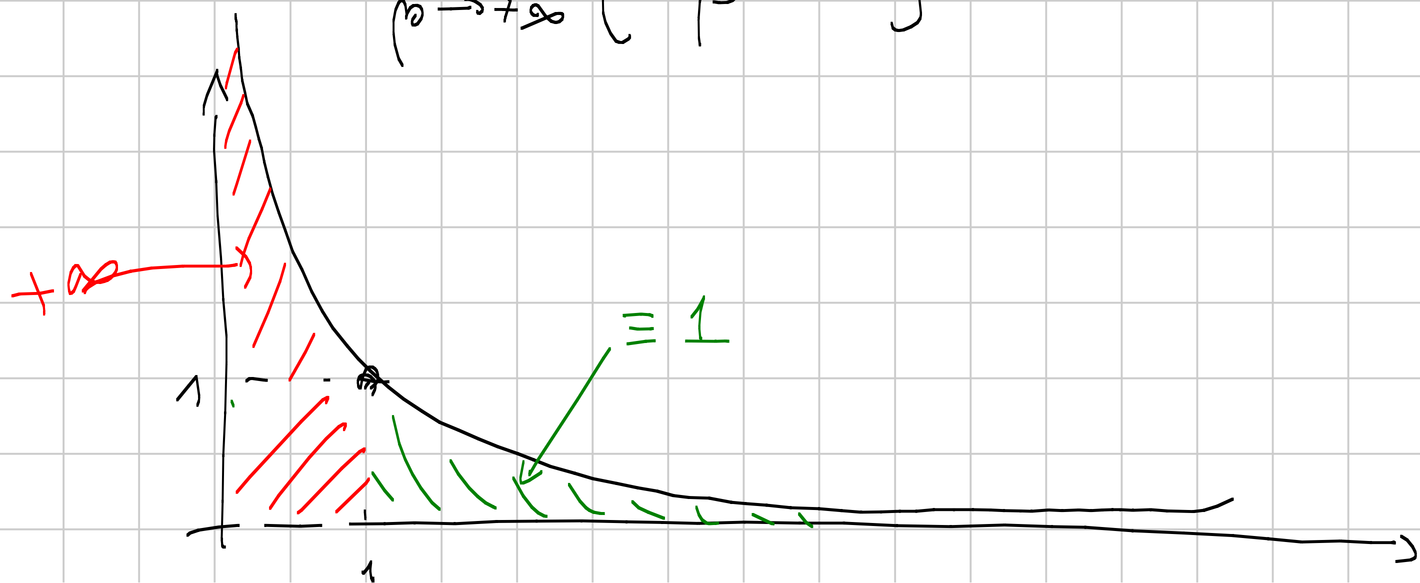
$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\alpha}\right] = +\infty$$

f.ne illimitata su intervallo limitato

f.ne limitata su intervallo illimitato

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\beta}$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{\beta} + 1\right] = 1$$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0^+} \Big[2\sqrt{x} \Big]_{x=\alpha}^{x=1}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \Big[2 - 2\sqrt{\alpha} \Big] = 2$$

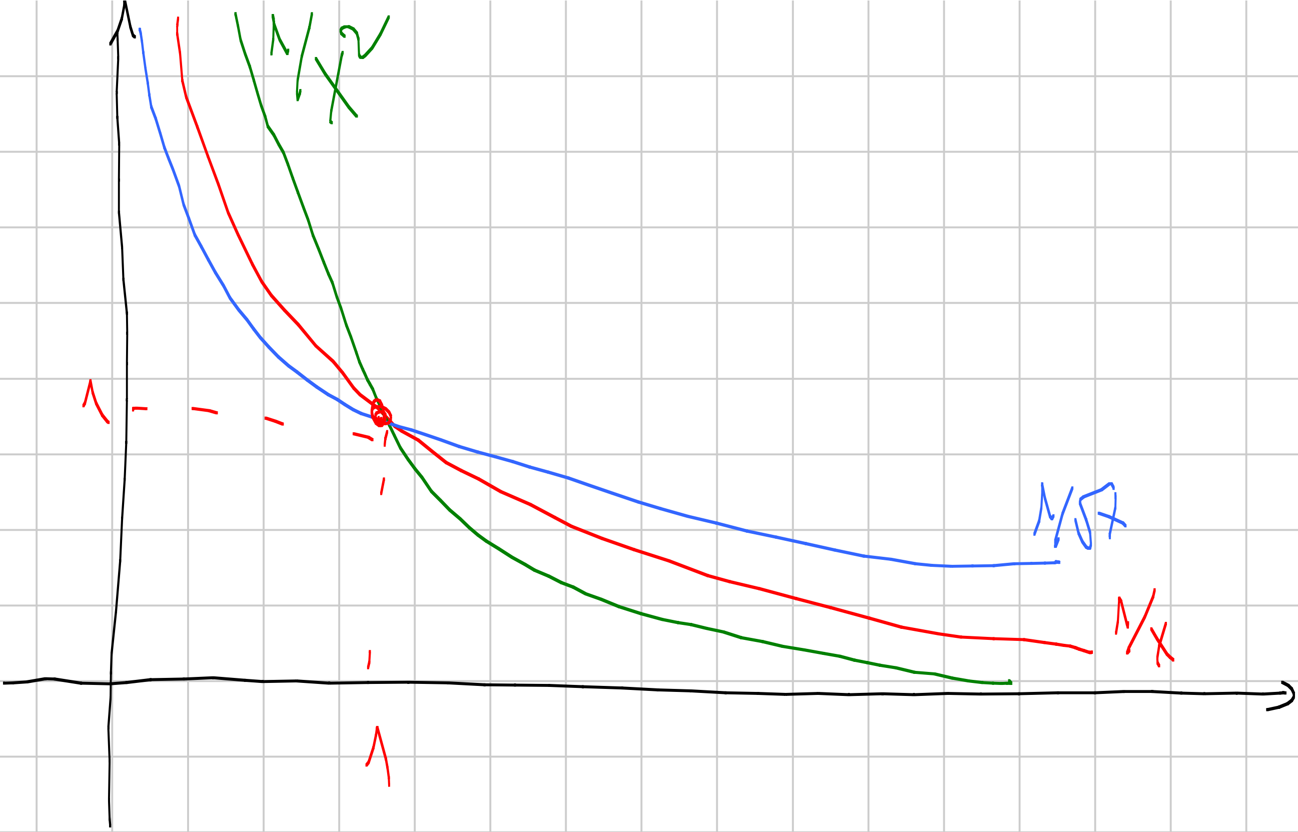
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\beta\to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\beta\to +\infty} \Big[2\sqrt{x} \Big]_{x=1}^{x=\beta}$$

$$= \lim_{\beta\to +\infty} \Big[2\sqrt{\beta} - 2 \Big] = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0} \Big[\log x \Big]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \Big[\log 1 - \log \alpha \Big] = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \text{-----} = \lim_{\beta\to +\infty} \Big[\log \beta - \log 1 \Big] = +\infty$$



$1/x^2$
$1/\sqrt{x}$
$1/x$
1
1

Più in generale si ha

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sono fond.

Esempio (Fondamentale)

① Sia $I_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ allora $I_\alpha \begin{cases} \in \mathbb{R}^+ & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

② Sia $I_\beta = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ allora $I_\beta \begin{cases} = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \in \mathbb{R}^+ & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

① $\underline{\alpha > 1}$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{y \to 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x=y}^{x=1}$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{y^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} \right]$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left[-\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{(\alpha-1) \cdot y^{\alpha-1}} \right] = +\infty$$

$\alpha < 1$

<u>Oss</u> $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

<u>Oss</u> $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$ o $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$

$b = +\infty$ o f illimitata in b

<u>Def</u> $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,b[$

si dice che "f è integrabile in senso generalizzato su $[a,b[$" se $\exists \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.

limite finito

Quando $\exists \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x) = +\infty \; (-\infty)$ diremo che l'integrale improprio è divergente positivamente (negat.) e scriveremo $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \; (-\infty)$.

Qualora il limite $\nexists$, la funzione non sarà integrabile impropriamente su $[a,b[$.

<u>Problema</u> $\exists f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e illimitata t.c. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$?

sì

$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ 1/x^2 & 1 < x \end{cases}$

<u>Oss</u>: Per la R-integrabilità era necessario che

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>Limitata</u> definita su un intervallo <u>limitato</u>

<u>Esempio</u> $f(x) = \cos x$ NON È integrabile in senso improprio su $[0,+\infty[$

infatti

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n^2} \cos x \, dx$$

integrale proprio

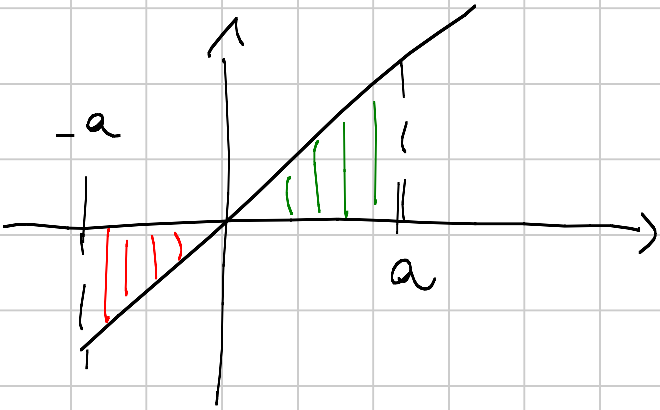
$$= \lim_{n\to+\infty} \Big[\operatorname{sen} x + \pi \Big]_{x=0}^{x=n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big[\operatorname{sen}(n^2) + \cancel{\pi} - \operatorname{sen} 0 - \cancel{\pi} \Big]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(n^2) \quad \nexists$$

Problema $f(x) = x$ è integrabile impropriamente

su $\mathbb{R}$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$?? NO



Osservo

$$\int_{-a}^{a} x\,dx = 0$$ Vero!

dunque $$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} x\,dx = 0$$

??!!!

dunque $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$$ FALSO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{3} x\,dx + \int_{3}^{+\infty} x\,dx$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{3} x\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{3}^{\beta} x\,dx$$

$\alpha = n$ $\quad \beta = n^2$

$$= \lim_{n \to -\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=n}^{x=3} + \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=3}^{x=n^2}$$

$$= \cancel{\frac{9}{2}} - \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2} + \lim_{n \to +\infty} \frac{n^4}{2} - \cancel{\frac{9}{2}}$$

$$= +\infty$$

Se prendo $\alpha = n^2$ e $\beta = n$

il limite vale $-\infty$

$\Longrightarrow \nexists$ il limite ovvero $\nexists \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

Def Data $f : [a,b] \setminus \{x_0\}$ integrabile su

- $[a, \beta]$ $\forall \beta \in [a, x_0[$
- $[\alpha, b]$ $\forall \alpha \in]x_0, b]$

diremo che f è integrabile in senso improprio su $[a,b]$ se

$$\exists \lim_{\beta \to x_0} \int_a^\beta f(x)dx \in \mathbb{R} \quad \& \quad \exists \lim_{\alpha \to x_0} \int_\alpha^b f(x)dx \in \mathbb{R} .$$

Ricordando le successioni monotone e le serie numeriche a termini positivi

Esercizio Data $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- f R-integrabile su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,b[$ ||| mi serve nella def. di integrale improprio
- $f \geq 0$ (≤ 0)

allora $\int_a^b f(x)dx$ esiste (finito o $\pm\infty$)

__dim__ proviamo che $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ è monotone (crescente nel caso $f \geq 0$)

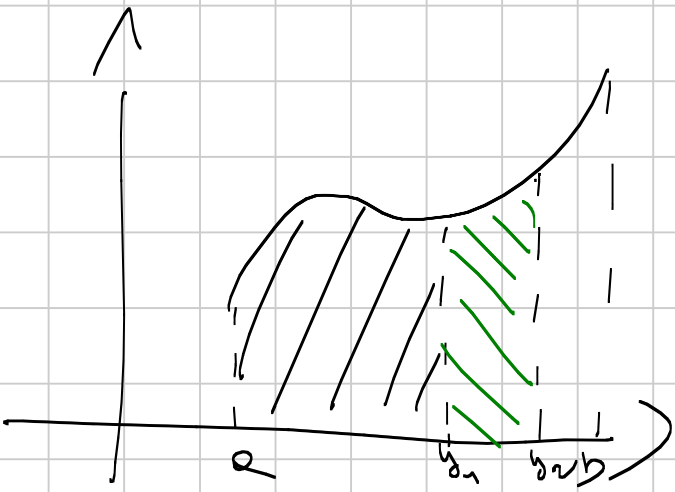
Suppongo $f(x) \geq 0$

$\forall\; y_1 < y_2 \in [a,b[$ voglio provare $F(y_1) \leq F(y_2)$

$$F(y_2) = \int_a^{y_2} f(x)\,dx = \int_a^{y_1} f(x)\,dx + \boxed{\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx} \geq \int_a^{y_1} f(x)\,dx = F(y_1)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx \geq 0$$

$\square$



Oss nell'esercizio precedente, l'ipotesi

- $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ R-integrabile $\forall \beta \in [a,b[$

con la più forte

- f continua su $[a,b[$.

Ricordando la condizione necessaria di convergenza per le serie

Teorema $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Tale che

- $f \geq 0 \quad \forall x > a$
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$
- $\exists \; l = \lim_{x \mapsto +\infty} f(x)$

allora $l = 0$

x assurdo $l > 0$

e ci si ritrova in una problematica già studiata per $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$

Teorema (1° criterio di integrabilità impropria)

Date $f, \varphi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) f continua su $[a,b[$

2) $|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b[$

3) $\varphi(x)$ integrabile impropriamente su $[a,b[$ $\left(\text{cioè } \int_a^b \varphi\, dx \in \mathbb{R} \right)$

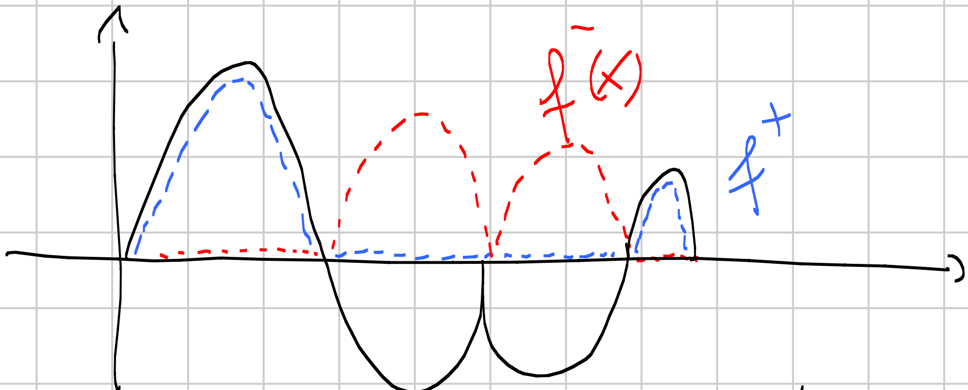
allora

$f(x)$ è integrabile impropriamente su $[a,b[$ $\left(\text{cioè } \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R} \right)$

dim

$f^+(x) = \text{parte positiva} = \max\{f(x), 0\} \geq 0$

$f^-(x) = \text{ '' negativa} = \max\{-f(x), 0\} \geq 0$



$f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ $\qquad$ $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$

$$f^+(x) \leq |f(x)| \leq \varphi(x)$$

$$\int_a^\beta f^+(x)\,dx \leq \int_a^\beta \varphi(x)\,dx \quad \forall x \in [a, \beta]$$

$$\lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f^+(x)\,dx \text{ esiste } \left(\text{essendo } f^+ \geq 0 \ !!! \right)$$

$$= \int_a^b f^+(x)\,dx$$

inoltre $$\int_a^b f^+(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

dunque $$\int_a^b f^+(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Identica dimostrazione x provare $\int_a^b f^-(x)\,dx \in \mathbb{R}$

e dunque $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f^-(x)\,dx + \int_a^b f^+(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$\square$

Teorema (Criterio del confronto asintotico)

Date $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$

1) f, g continue su $[a, b[$

2) $f, g \geq 0$ su $[a, b[$

3) $f \sim g$ per $x \to b$ $\left(\lim_{x \to b} \frac{f}{g} = l \in]0, +\infty[\right)$

Allora

f integrabile in senso improprio su $[a, b[$ $\underline{\text{sse}}$ g integrabile in senso improprio su $[a, b[$

Si osservi che $f \sim g \iff \lim \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0, +\infty[$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \;]b-\delta, b[$ t.c. $l - \varepsilon < \frac{f}{g} < l + \varepsilon$
$\forall x \in]b-\delta, b[$

$\implies \varepsilon = \frac{l}{2}$ $\exists \;]b-\delta, b[$ t.c. $\frac{l}{2} < \frac{f}{g} < \frac{3}{2} l$
$\forall x \in]b-\delta, b[$

$\Rightarrow \quad \exists \,]b-\delta, b[\; : \; \forall x \in \,]b-\delta, b[$

$$\frac{\ell}{2} \cdot g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \ell \, g(x)$$

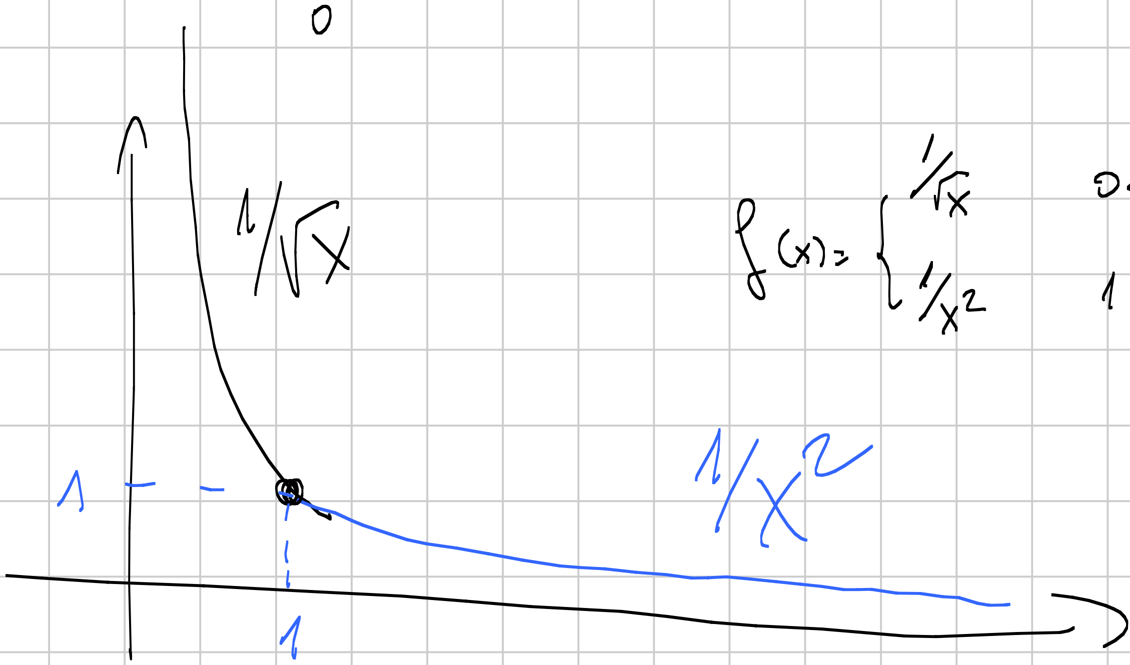
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b-\delta} \cdots + \int_{b-\delta}^{b} \cdots$$

numero reale

Pb $\exists\, f : [0,+\infty[$ che sia

- continua
- illimitata superiormente
- t.c. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

? SI!



$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 1/x^2 & 1 < x \end{cases}$$

Problema

$\exists\, f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ t.c.

- f continua
- $\sup_{x>b} f(x) = +\infty \quad \forall b \in [0,+\infty[$
- $\int_0^{+\infty} (f(x))^\alpha\,dx \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$

Difficile

Esercizio ① Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge (se ne esistono)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx$$

$\mathbb{R}$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^\alpha}}$$

devo confrontarmi con questo

$$\int_2^{n} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} \underset{\substack{x=e^t \\ dx=e^t dt}}{=} \left(\int_{\log 2}^{\log n} \frac{e^t\,dt}{e^t\,t^\alpha} \right)$$

$x=2 \to t=\log 2$

$x=n \to t=\log n$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^{n} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{\log 2}^{\log n} \frac{dt}{t^\alpha}}_{\text{converge } \forall \alpha>1}$$

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge $\longrightarrow$ $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x}$ diverge

Domande

$f=x$ ha ordine 1 di infinitesimo per $x\to 0$

$g = x\log x$ che ordine ha per $x \to \infty$?

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x\log x}{x} = \log x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

ovvero $\quad x = o(x\log x)$ ma $\nexists\, \alpha : x^\alpha \sim x\log x$

<u>Problema</u>

Ordine di infinitesimo di

$$f(x) = x\log(1+x)$$

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{x\log(1+x)}{x^\alpha} = \frac{x\left(x+o(x)\right)}{x^\alpha}$$

$$= \frac{x^2+o(x^2)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \left]0,+\infty\right[$$

se prendo $\boxed{\alpha = 2}$

ma $\frac{1}{x\log x}$, che è infinitesimo per $x \to +\infty$,

non so dire che ordine abbia!

② Per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge (se ne esistono)

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x \log x \left[\log(\log x)\right]^\beta}\, dx$$

$$\int_4^{M} \frac{dx}{x \log x \left[\log(\log x)\right]} \underset{x=e^t}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\log 4}^{\log M} \frac{\cancel{e^t}\, dt}{\cancel{e^t}\, t \left[\log t\right]}$$

$$= \int_{\log 4}^{\log M} \frac{dt}{t (\log t)} \xrightarrow[M \to +\infty]{} \int_{\log 4}^{+\infty} \frac{dt}{t \log t} = +\infty$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t \log t \left(\log(\log t)\right)^\beta} \in \mathbb{R} \text{ se } \beta > 1$$

etc