Primitive di una funzione - lez 1

Titolo nota 30/11/2010

Abbiamo visto come calcolare f' (quando esiste) a partire da f, ovvero abbiamo introdotto l'operatore (qui lo abbiamo ristretto alle f.ni derivabili con continuità)

$$D : C^1(I) \longrightarrow C^0(I)$$
$$f(x) \longmapsto f'(x) = D f(x)$$

Questo operatore può agire solo su certe funzioni e non su altre (ad esempio $\nexists D(|x|)$)

Vogliamo ora "antiderivare", cioè considerare D^{-1}, e questa branca dell'analisi è detto

Ricerca di una primitiva

Primitive

Def $f: I \to \mathbb{R}$, diciamo che $F: I \to \mathbb{R}$ è

"primitiva di f" se

1) F derivabile su I
2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempio

$f(x) = x$ allora $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva
(infatti $F'(x) = x$)

$f(x) = \cos x$ allora $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una primitiva
(infatti $F'(x) = \cos x$)

$f(x) = \cos x$ allora $F(x) = \operatorname{sen} x + \pi$ è una primitiva
(infatti $F'(x) = \cos x$)

Teorema $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitive di $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo)

allora $\exists\, c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$

dim

$$F'(x) = f(x)$$
$$G'(x) = f(x) \implies (F-G)'(x) = 0 \quad \boxed{\forall x \in I} \quad \text{(I intervallo)}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$$

$\blacksquare$

Def Data $f : I \to \mathbb{R}$, diciamo "integrale indefinito di f" e lo indichiamo con $\int f(x)\,dx$ l'insieme di tutte le primitive della funzione $f(x)$, ovvero

$$\boxed{\int f\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \ : \ F \text{ primitiva di } f\}}$$

In particolare, dato che 2 primitive differiscono per una costante, si ha per esempio

$$\int \cos x\,dx = \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\text{1 primitiva}} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dato che due primitive F e G di una stessa funzione f differiscono per una costante, determinare tutte le primitive di f consiste nel determinare una sola primitiva F di f ovvero

$$\boxed{\int f\,dx = F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

ovvero

$$\int f\,dx = F(x) + \mathbb{R}$$

dove $F(x) + \mathbb{R} = \{ G : I \to \mathbb{R} : \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G = F + c \}$

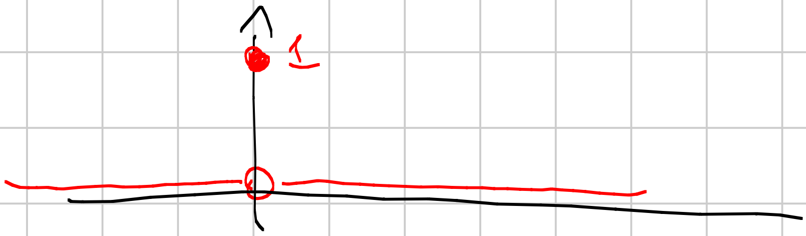
<u>Esempio</u> calcolare $\int \operatorname{sen} x \, dx$

Sappiamo che $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$, ovvero $-\cos x$ è una primitiva

e dunque $$\boxed{\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Oss Esistono f.ni che non hanno primitiva

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$ Non ha primitive



assurdo $\exists F$ primitiva di f, F derivabile (e continua)

allora
$$\begin{cases} F'(x) = 0 & \forall x < 0 \quad \text{un intervallo} \\ F'(x) = 0 & \forall x > 0 \quad \text{" "} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = c_1 & \forall x < 0 \\ F(x) = c_2 & \forall x > 0 \end{cases}$$

ma
$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \forall x < 0 \\ F(x) = f(x) & \forall x > 0 \end{cases}$$ (è una primitiva)

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$ (per la continuità di F)

ma $\quad 0 = F'(0) \neq f(0) = 1$

Tabelle primitive delle f.ni elementari

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}, \boxed{n \neq -1} \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \; c \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x \longrightarrow \boxed{F(x) = \log|x| + c}$ "

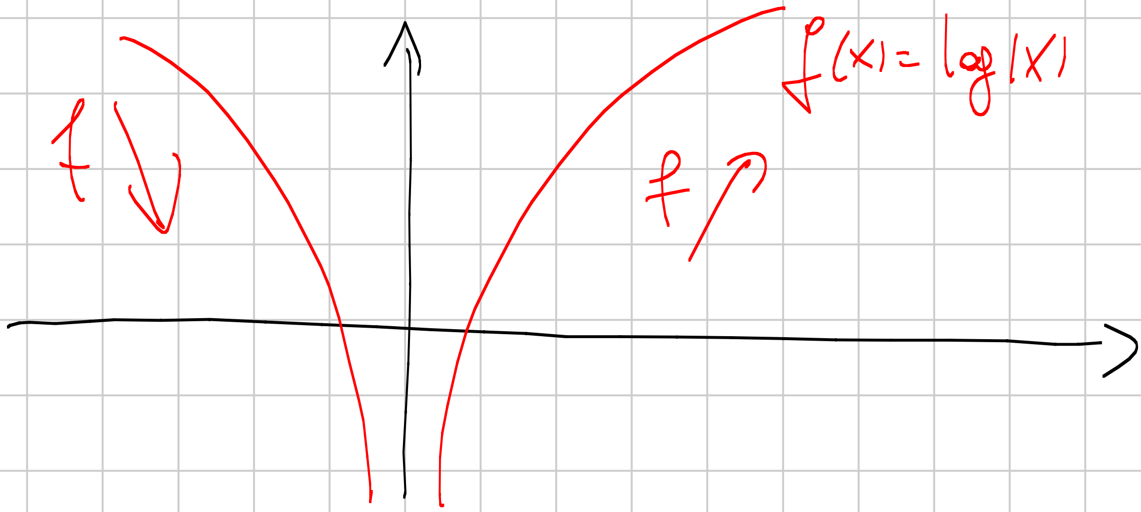
$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x + c$ "

<u>Oss</u> $(\log x)' = 1/x \quad \boxed{x > 0}$

$$(\log|x|)' = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ 1/x & x < 0 \end{cases}$$

$$\log|x| = \begin{cases} \log x & x>0 \\ \log(-x) & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log x)' = 1/x & x>0 \\ (\log(-x))' = \dfrac{1}{(-x)} \cdot -1 = \dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$



$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow F(x) = -\cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \operatorname{sen} x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = q^{x} \quad q > 0 \longrightarrow F(x) = \dfrac{q^{x}}{\log q} + c \quad c \in \mathbb{R}$

Questa Tabella è stata ricavata direttamente dalla Tabella delle derivate, leggendola a rovescio.

A questo punto, per ottenere le primitive di una generica funzione $f(x)$, servono delle regole di "antiderivazione", così come c'erano regole di derivazione.

Osservazione importante

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale proverà che, data una qualsiasi funzione continua $f(x)$, esiste $F(x)$ primitive di f.

Domande successive:

Se $f(x)$ continua ed esprimibile in termini di funzioni elementari

allora $F(x)$, le sue primitive, si può esprimere a sua volta esprimibile in termini di funzioni elementari ??

NO!! Infatti la f.ne $f(x) = e^{-x^2}$ ha primitive, ma queste non si può esprimere in termini di funzioni elementari.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow \int \operatorname{sen} x = -\cos x + C$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \longrightarrow \int \operatorname{tg} x = -\log \cos x + C$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} \longrightarrow \int f(x) = \log(e^x+1) + c$$

$$f(x) = \exp\left(\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+3)}\right) \qquad \int f(x) = \, ? \, + c$$

Regole di derivazione

1. "Derivata di una somma = somma delle derivate"

2. "Regola di Leibniz"

3. "Derivazione delle funzioni composte"

Regole di integrazione

1. "Integrazione per decomposizione in somme" (primitive di una somma = somma primitive)

2. "Integrazione per parti"

3. "Integrazione per sostituzione"

Per quanto riguarda la decomposizione in somme, è immediato in quanto

$$\boxed{\int \left(f(x)+g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

Infatti, dette F e G una primitiva di f e g rispettivamente, si ha che $(F+G)$ è una primitiva di $f+g$ (verifica immediata!)

$$\int (\operatorname{sen} x + x)\, dx = -\cos x + \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

primitiva di $\operatorname{sen} x$

primitiva di x

$$\int \frac{1+x}{x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \log|x| + x + c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

Integrazione per parti

$$\boxed{\text{Regola di Leibniz} \qquad (u \cdot v)' = u'v + uv'}$$

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

Ma se due funzioni coincidono, anche gli integrali indefiniti coincidono, e quindi

$$\int u'(x)v(x)\,dx = \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u(x)v'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

Regola di Integrazione per parti

Esempio Calcolare $\int x \cdot e^x\,dx$

$$\int \underset{u'}{x} \cdot \underset{v}{e^x}\,dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} \underset{v'}{e^x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x\,dx$$

mi fermo

x che non conduce

$$\int \underset{v}{x}\, \underset{u'}{e^x}\, dx = \underset{v}{x}\, \underset{u}{e^x} - \int \underset{v'}{1} \cdot \underset{u}{e^x}\, dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifica $(xe^x - e^x + c)' = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} + 0 = xe^x$ ✓

$$\int \underset{u'}{e^x} \cdot \underset{v}{x}\, dx = \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v}{x} - \int e^x \cdot 1\, dx$$

$$= e^x \cdot x - e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Verifica $(xe^x - e^x + c)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$ ✓

Esempio Calcolare $\int x^2 e^x dx$

$$\int \underset{v}{x^2} \underset{u'}{e^x} dx = \underset{v}{x^2} \cdot \underset{u}{e^x} - \int \underset{v'}{(2x)} \cdot e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$= (x^2 - 2x + 2) e^x + c$$

Verifica $\left[(x^2 - 2x + 2) e^x + c\right]' = (\cancel{2x} - \cancel{2}) e^x + (x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2}) e^x$

$$= x^2 e^x$$

Esempio calcolare $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

dim

$$\int \underset{v}{x}\, \underset{u'}{\operatorname{sen} x} \, dx = \underset{v}{x} \cdot \underset{u}{(-\cos x)} - \int \underset{v'}{1} \cdot \underset{u}{(-\cos x)} \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c$$

verifica

$$(-x \cos x + \operatorname{sen} x + c)' = \cancel{-\cos x} + x \operatorname{sen} x + \cancel{\cos x}$$

$$= x \operatorname{sen} x \quad \checkmark$$

Esercizio Calcolare $\int x \cos x \, dx$

Esempio calcolare $\int \log x \, dx$

$$\int \underset{v}{\log x} \cdot \underset{u'}{1} \, dx = \underset{v}{\log x} \cdot \underset{u}{x} - \int \underset{v'}{\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)} \cdot \underset{u}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx$$

$$= x \log x - x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

verifica

$$(x \log x - x + c)' = \log x + \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} \cancel{- 1} + 0 = \log x \quad \checkmark$$

Esempio calcolare $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \underset{u'}{\operatorname{sen} x} \, \underset{v}{\operatorname{sen} x} = \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{u}{(-\cos x)} \underset{v'}{\cos x} \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1 \, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen}x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

$$2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen}x\cos x + x \qquad + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen}x\cos x\right) + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

<u>verifica</u>

$$\left[\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{sen}x\cos x\right)+c\right]' = \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen}^2 x$$

<u>Esempio</u> calcolare $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \underset{u}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \underset{v'}{\operatorname{sen}x}\,dx$$

$$= \underset{u}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\underset{v}{(-\cos x)} - \int \underset{u'}{(2\operatorname{sen}x\cos x)}\,\underset{v}{(-\cos x)}$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x\cos x + 2\int \operatorname{sen}x\cos^2 x\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x\cos x + 2\int \operatorname{sen}x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)dx$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\operatorname{sen}^2 x\cos x + 2\int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

$$3\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\operatorname{sen}^2 x\cos x - 2\cos x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\left(-2\cos x - \operatorname{sen}^2 x\cos x\right) + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

<u>Esempio</u> calcolare $\int \log^3 x\,dx$

$$\int \underset{\overset{\uparrow}{v}}{\log^3 x}\cdot \underset{\overset{\uparrow}{u'}}{1}\,dx = \underset{\overset{\uparrow}{v}}{\log^3 x}\cdot \underset{\overset{\uparrow}{u}}{x} - \int \underset{\overset{\uparrow}{v'}}{\left(3\log^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)}\,\underset{\overset{\uparrow}{u}}{x}\,dx$$

$$= x\cdot\log^3 x - 3\int \underset{\overset{\uparrow}{v}}{\log^2 x}\cdot \underset{\overset{\uparrow}{u'}}{1}\,dx$$

$$= x\log^3 x - 3\left[\underset{\overset{\uparrow}{v}}{\log^2 x}\cdot \underset{\overset{\uparrow}{u}}{x} - \int \left(\underset{\overset{\uparrow}{v'}}{2\log x\cdot\frac{1}{x}}\right)\cdot \underset{\overset{\uparrow}{u}}{x}\,dx\right]$$

$$= x\log^3 x - 3x\log^2 x + 6\int \log x\,dx$$

$$= x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6\left[\log x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx\right]$$

$$= x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6x \log x - 6x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= x \left[\log^3 x - 3\log^2 x + 6 \log x - 6\right] + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

<u>Verifica</u> (da fare)