<u>Oss</u> Nel caso in cui si vuole provare il Teorema dell'Hopital nella forma $0/0$ quando $x_0 = +\infty$, conviene fare la trasformazione $\boxed{y = 1/x}$ in modo da ricondurre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}$$

e quindi considerare il limite

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\tilde{f}(y)}{\tilde{g}(y)} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \tilde{f}(y) &= f(1/y) \\ \tilde{g}(y) &= g(1/y) \end{aligned}$$

Teorema Hopital (Forma ∞/∞)

$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$

1) f, g derivabili in $]a, b[$

2) $\left|\lim_{x \to a^+} f\right| = \left|\lim_{x \to a^+} g\right| = \infty$ ← non ci interessa il segno, ma solo che divergano a $\pm\infty$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

4) $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[$

allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Senza dimostrazione

Esempi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!}}{x^5} \overset{0/0}{} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}}{5x^4}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{20\, x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{60 \cdot x^2}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{120 \cdot x} = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$$

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} = o(x^5)$$

$$\operatorname{sen} x = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + o(x^5) \qquad (x \to 0)$$

Oss Quando derivo, la funzione derivata

è "più brutta" della f.ne di partenza

$f(x) = \sqrt{x}$ $[0,+\infty[$ $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $]0,+\infty[$

Oss Può esistere $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

e non esistere $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Esempio

$f = x^2 \operatorname{sen} 1/x \qquad g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\text{infinitesimo}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} 1/x}_{\text{limitato}} = 0$$

però

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} 1/x + x^2 \cos 1/x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x$$

$$g'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x\right) \quad \nexists$$

perché $\nexists \lim_{x\to 0} \cos 1/x$ perché $\nexists \lim_{y\to+\infty} \cos y$

non conviene l'hopital

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\operatorname{sen} x \operatorname{Tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos x \cdot \frac{e^{x^2} - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos x \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - (\cos x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{x^2} - 1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} - \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(-\frac{1}{x})}{x^2} = \left(\text{comme } \lim_{x \to 0} \frac{x^{-2}}{\exp(1/x)} \right)$$

$$\overset{dH}{=} \lim \frac{e^{-1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{-2}}{e^{1/x}} = \lim_{\substack{y \to +\infty \\ y = 1/x}} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

Teorema

f continua definita in un intorno di x_0

- f derivabile per $x \neq x_0$
- $\lim_{x \to x_0^-} f' = \alpha_-$ $\lim_{x \to x_0^+} f' = \alpha_+$

Questo è il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0^+$

Allora

$f'_+(x_0) = \alpha_+$ e $f'_-(x_0) = \alpha_-$

Questo è $f'_-(x_0)$ ovvero $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

f derivabile se e solo se $\alpha_- = \alpha_+$

dim

$$\underset{\text{derivata destra in } x_0}{f'_+(x_0)} \overset{\text{x def}}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \overset{\text{per Hip}}{=} \alpha_+$$

$f'_-(x_0)$

$\boxed{\cancel{\text{Rip}}}$

Esercizio per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$

è derivabile su $\mathbb{R}$ la f.ne

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ cx - x^2 - 3b & x < 0 \end{cases}$$

È chiaro che $f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall a, b, c$ (e quindi continua)

① Continuità in 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)_{|\{x<0\}} = \lim_{x \to 0^-} (cx - x^2 - 3b) = -3b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_{|\{x>0\}}(x) = \lim_{x \to 0^+} (a-1)x + b - a = b - a$$

$$f(0) = 3$$

$$\begin{cases} -3b = 3 \\ b - a = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ cx - x^2 - 3b & x < 0 \end{cases} \qquad f(x) \begin{cases} -5x + 3 & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ cx - x^2 + 3 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \underline{\underline{f'(x)}} = \lim_{x \to 0^-} c - 2x = c$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underline{\underline{f'(x)}} = \lim_{x \to 0^+} -5 = -5 \qquad \Longrightarrow \boxed{c = -5}$$

Def Diciamo "polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0, associato ad f" un polinomio $P_n(x)$ di ordine n t.c.

$$f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \qquad x \to x_0$$

Esempio Chi è $P_0(x)$? $\quad f(x) - P_0(x) = o(1)$

ovvero $P_0(x) = f(x_0)$!!!

Esempio Chi è $P_1(x)$? $\quad f(x) - P_1(x) = o(x-x_0)$

ovvero $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, la retta tangente

L'esistenza la proviamo tra poco. Vediamo unicità

<u>Teorema</u> (Unicità polinomio di Taylor)

Se esiste, il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 associato ad f è unico

<u>dim</u>

Supponiamo <u>x assurdo</u> $f - Q_n = o\left((x-x_0)^n\right)$ $\quad x \to x_0$

$f - P_n = o\left((x-x_0)^n\right)$

$$\Rightarrow P_n(x) - Q_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \qquad (x \to x_0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-x_0)^k = P_n(x) - Q_n(x) \qquad (x \to x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) - Q_n(x) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \dots + c_n \cdot 0^n$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to x_0} o\left((x-x_0)^n\right) = 0$$

dunque $c_0 = 0$!!

dunque $P_n - Q_n = \sum_{k=1}^{n} c_k (x-x_0)^k = (x-x_0) \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x-x_0)^{k-1}$

dunque

$$\cancel{(x-x_0)} \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k (x-x_0)^{k-1} = o\left((x-x_0)^{\cancel{m}\, m-1}\right)$$

dunque

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{m} c_k (x-x_0)^{k-1} = c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0^2 + \cdots$$

$$\lim_{x \to x_0} o\left((x-x_0)^{m-1}\right)$$

$$0$$

dunque $c_1 = 0$

dunque

$$\sum_{k=2}^{m} c_k (x-x_0)^{k-2} = o\left((x-x_0)^{m-2}\right)$$

$$\vdots$$

$$c_m = o(1)$$

e dunque $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$

" " $P_m = Q_m$

Enunciato

Teorema (formula Taylor con il resto di Peano)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a,b[$

1) f derivabile $(n-1)$ volte in $]a,b[$

2) f 〃 n 〃 〃 x_0

Posto $$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$0! = 1! = 1$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

allora $$\underbrace{f(x) - P_n(x) = o\left((x-x)^n\right)}_{} \qquad x \to x_0$$

La nostra Tesi è $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Osserviamo che $P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

$$\text{T} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f-P_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\Downarrow}{=} \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{1}{n!} f^{n}(x_0)\right]$$

$$\underline{\text{T suff}} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Osservo che

$$\boxed{P_{n-1}(x_0) = f(x_0)} \quad \boxed{P'_{n-1}(x_0) = f'(x_0)} \quad \cdots \quad \boxed{P^{(n-1)}_{n-1}(x_0) = f^{n-1}(x_0)}$$

infatti

$$P_{n-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)$$

$$P'_{n-1}(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-2)!}\cdot(x-x_0)^{n-2}$$

$$P''_{n-1}(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-3)!}\cdot(x-x_0)^{n-3}$$

etc.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P'_{n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

applico una prima volta Hopital nella forma $0/0$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - P''_{n-1}(x)}{n \cdot (n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2}}$$

$$= \cdots$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}_{n-1}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \; \boxed{\equiv}$$

Commento

Quindi si applica $n-1$ volte Thm Hopital

(ecco perché $f \in C^{n-1}([a,b])$)

e poi si calcola la derivata in x_0

della funzione $f^{(n-1)}(x)$, cioè la

derivata n-esima.

Esercizio Calcolare nel punto $x_0 = 0$ i polinomi

di Taylor di $f(x) = e^x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\log(1+x)$

$f(x) = Tg\,x \qquad f'(x) = 1 + Tg^2(x)$

$$f''(x) = (f')'(x) = 2\,Tg(x) \cdot \left(1 + Tg^2(x)\right)$$
$$= 2\,Tg(x) + 2\,Tg^3(x)$$

$$f''' = 2\left(1 + Tg^2(x)\right) + 6\,Tg^2(x)\left(1 + Tg^2(x)\right)$$
$$= 2 + 8\,Tg^2(x) + 6\,Tg^4(x)$$

Voglio calcolare il polinomio $P_3(x)$ 3° ordine

centrato in $x = 0$ di $f(x) = Tg(x)$

$f(0) = Tg(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 + Tg^2(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = 2$

dunque

$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3$$

$$= x + \frac{x^3}{3}$$

Esercizio Calcolare $P_n(x)$ $n=1,2,3,4$

relativo a $f(x) = x^2 - 3x^4 + x^5 - \frac{1}{2}x^8$

→) centrato in $x_0 = 0$

→) " " $x_0 = 1$

dim

Calcolo il polinomio $P_8(x)$ relativo a $f(x)$

centrato in $x = 0$

$$f(x) = x^2 - 3x^4 + x^5 - \frac{1}{2}x^8$$

$P_3(x) = x^2$ infatti $f(x) - P_3(x) = -3x^4 + \dots \stackrel{!}{=} o(x^3)$

$P_6(x) = x^2 - 3x^4 + x^5$ infatti, $f(x) - P_6(x) = -\frac{1}{2}x^8 = o(x^6)$

Calcolo il polinomio di ordine 3

centrato in $x_0 = 1$ relativo a

$$f(x) = x^2 - 3x^4 + x^5 - \frac{1}{2}x^8$$

In questo caso devo calcolare f', f'' e f''' in $x_0 = 1$!!!

$$f(1) = 1 - 3 + 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f' = 2x - 12x^3 + 5x^4 - 4x^7 \qquad f'(1) = -9$$

$$f'' = 2 - 36x^2 + 20x^3 - 28x^6 \qquad f''(1) = -42$$

$$-34 \qquad -14$$

$$f''' = -72x + 60x^2 - 168x^5 \qquad f'''(1) = -180$$

$$-12$$

$$P_3(x) = -\frac{3}{2} - 9(x-1) - \frac{42}{2}(x-1)^2 - \frac{180}{3!}(x-1)^3$$

Esercizio verificare che, relativamente all'esercizio precedente, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - P_3(x)}{(x-1)^3} = 0$

Teorema (Formula Taylor con resto Lagrange)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

f derivabile $\boxed{n+1}$ volte in $]a,b[$ (ipotesi + forti che per Peano)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

allora $$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)} \quad (x \to x_0)$$

dove $$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} = o\left((x-x_0)^n\right)$$

dove $z(x)$ è un punto compreso tra x_0 e x

Oss $R_{n+1}(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$

infatti $$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!} \cdot \lim_{x \to x_0}(x-x_0)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot 0 = 0$$

dim

$x > x_0$

$$\text{Tesi}\quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\text{Tesi}\quad \boxed{\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}} = \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}$$

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\left(f(x)-P_n(x)\right)-\left(f(x_0)-P_n(x_0)\right)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} =$$

Cauchy

$$= \frac{f'(z(x)) - P_n'(z(x))}{(n+1)\cdot(z(x)-x_0)^n}$$

$z(x)$ compreso tra x_0 e x

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{\left(f'(z(x))-P_n'(z(x))\right)-\left(f'(x_0)-P_n'(x_0)\right)}{(z(x)-x_0)^n-(x_0-x_0)^n}$$

Cauchy

$$= \frac{1}{(n+1)}\,\frac{f''(\bar z(x))-P_n''(\bar z(x))}{n(\bar z(x)-x_0)^{n-1}} \;\ldots\ldots\; \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(z)$$

Vediamo la dimostrazione precisa!

$$g(x_0) = h_{n+1}(x_0) = 0$$

$$\boxed{g(t) = f(t) - P_n(t)} \qquad \boxed{h_k(t) = (t-x_0)^k} \quad 0 \le k \le n+1$$

$$\frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{g(x) - \overset{0}{g(x_0)}}{h_{n+1}(x) - h_{n+1}(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{g'(z_1)}{h'_{n+1}(z_1)} = \frac{g'(z_1)}{(n+1)\, h_n(z_1)}$$

poi

$$\frac{g'(z_1)}{(n+1)\, h_n(z_1)} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{g'(z_1) - g'(x_0)}{h_n(z_1) - h_n(x_0)} \overset{C.}{=} \frac{1}{n+1} \frac{g''(z_2)}{h'_n(z_2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,n} \cdot \frac{g''(z_2)}{h_{n-1}(z_2)}$$

- - - -

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \text{- - - -} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\underset{z(x)}{z_{n+1}})$$

$\boxed{\cancel{\text{R.I.P.}}}$

Problema Approssimazione di 1° ordine di

$\sqrt{65}$ utilizzando il resto di Lagrange

dire

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+1/64}$$

Voglio approssimare $\sqrt{1+1/64}$ con $\sqrt{1+x}$ in un intorno di $x_0=0$

$$\sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + \frac{f''(z(x))}{2!}(\cancel{z}(x)-0)^2$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \qquad f''(z(x)) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+z(x))^{3/2}}$$

$$f(1/64) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+z(x))^{3/2}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^2$$

osservo che $\qquad 0 < z(x) < 1/64$

$$\left| f(1/64) - 1 - \frac{1}{128} \right| = \frac{1}{8}\left|\frac{1}{(1+z(x))^{3/2}}\right|\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^2$$

$$\left|f\left(\tfrac{1}{64}\right) - 1 - \frac{1}{128}\right| \leq \frac{1}{8} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{64}\right]} \left|\frac{1}{(1+z(x))^{3/2}}\right| \left(\frac{1}{64}\right)^2$$

$$\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8^4} \cdot 1 = \frac{1}{8^5}$$

e dunque l'errore commesso prendendo

$\frac{129}{128} \cdot 8 = \frac{129}{16}$ in luogo di $\sqrt{65}$

è inferiore a $1/8^4$!!!