Studio di funzioni

Titolo nota 29/11/2010

Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di massimo (minimo) locale interno

Allora $f'(x_0) = 0$

ma ...

Se $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, $x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0) = 0$

Allora x_0 punto di max (min) locale interno ¿?? NO!

Esempio $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Essendo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, per un corollario del Teorema di Weierstrass

$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$: x_0 punto di minimo assoluto

Ma $f' = 3x^2 = 0$ ~~per~~ $x = 0$

e quindi $x_0 = 0$ è anche l'UNICO punto in

cui $f' = 0$. Però $f' > 0 \ \forall x \neq 0$!

$$A = \{x_0 : x_0 \text{ max (min) locale interno}\}$$

$$\cap \not\parallel$$

$$B = \{x_0 : f'(x_0) = 0\}$$

Vogliamo caratterizzare i punti $x_0 \in I$ in

cui la funzione f ha tangente orizzontale

ovvero $f'(x_0) = 0$.

Def $f: I \to \mathbb{R}$, dato $x_0 \in I$, questo lo dico "stazionario per la funzione f"

se $\exists f'(x_0) = 0$.

Oss abbiamo già osservato che non tutti i punti stazionari sono di minimo o di massimo

$x_0 = 0$ per $f(x) = x^2$ è p.to $\begin{cases} \text{stazionario} \\ \text{minimo} \end{cases}$

$x_0 = 0$ per $f(x) = 1 - x^2$ è punto $\begin{cases} \text{stazionario} \\ \text{massimo} \end{cases}$

$x_0 = 0$ per $f(x) = x^3$ è punto $\begin{cases} \text{stazionario} \\ \text{né min. né max} \end{cases}$

Oss Un punto x_0 può essere di minimo per $f(x)$ senza essere stazionario:

si pensi a $x_0 = 0$ per $f(x) = |x|$.

Osservazione Importante (ma banale)

Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$

dire che "x_0 punto di minimo per f su I"

significa "$\forall x \in I \quad f(x_0) \leq f(x)$"

dire che "m è il minimo di f su I"

significa "$\forall x \in I \quad m \leq f(x)$"

NON CONFONDETE

"punto di minimo" con "minimo"

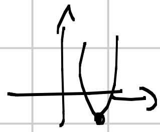
(e analogamente x il max)

Teorema

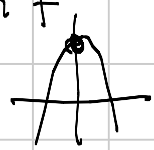
$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, I intervallo, $x_0 \in I \setminus \partial(I)$, $f'(x_0)=0$

① $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$: $\begin{cases} f'(x)<0 & \text{in } U \cap \{x<x_0\} \\ f'(x)>0 & \text{in } U\cap\{x>x_0\} \end{cases} \Rightarrow$ x_0 p.to di min locale stretto per f

$U \subset]a,b[$



② // $\begin{cases} f'(x)>0 & \text{in } U \cap \{x<x_0\} \\ f'(x)<0 & \text{in } U\cap\{x>x_0\} \end{cases} \Rightarrow$ x_0 è punto di max locale stretto per f



③ f' non cambia segno in un intorno di x_0 $\Rightarrow$ f è monotona in un intorno di x_0 $\Rightarrow$ x_0 non è né min né max locale

Oss

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f' \nearrow \text{ in }]x_0-\delta, x_0+\delta[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x)<0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ f'(x)>0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f' \searrow \text{ in }]x_0-\delta, x_0+\delta[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x)>0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ f'(x)<0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

Oss

perché non >!

1) x_0 p.to minimo locale stretto, $f \in C^2 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

2) " " max " ", $f \in C^2 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

Esempio (chiarifica oss.) $f(x)=x^4$ ha in $x_0=0$ un minimo locale stretto, ma

$f'(x)=4x^3$ (e infatti $f'(0)=0$!) & $f''(x)=12x^2 \to f''(0)=0$

Esercizio

Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, determinare il n.ro di soluzioni reali di

1) $12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + a = 0$

2) $ax^4 + bx + 1 = 0$

3) $(2x^2 + 3x)e^x = a$

3) $f(x) = \underbrace{(2x^2+3x)}_{\text{pol.}}\underbrace{e^x}_{\text{exp.}}$ la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$

(f è continua insieme alle derivate di $\forall$ ordine)

$\boxed{f(x) = a} \iff \begin{cases} y = a \\ y = f(x) \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x \left(2 + \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 0^+$$

Infatti, $2+\frac{3}{x} \to 2$, mentre $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0^+$

$f(0)=0 \quad f(-\frac{3}{2})=0$

Cerchiamo i punti stazionari, ovvero le soluzioni di $\boxed{f'=0}$

$$f'(x) = \left((2x^2+3x)e^x\right)' = (2x^2+3x)'e^x + (2x^2+3x)\cdot e^x$$

$$= (4x+3)e^x + (2x^2+3x)e^x$$

cerco gli x t.c.

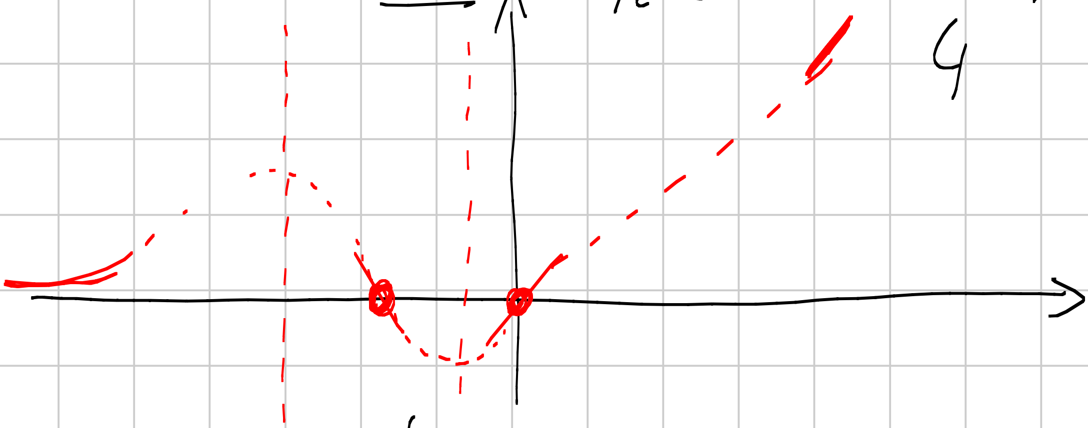
$$= (2x^2+7x+3)e^x \overset{?}{=} 0$$

se $A\cdot B=0$ se $A=0$ o $B=0$

ed essendo $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ si ha che

$f'(x)=0$ se $2x^2+7x+3=0$

se $x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}$ $\begin{cases} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$



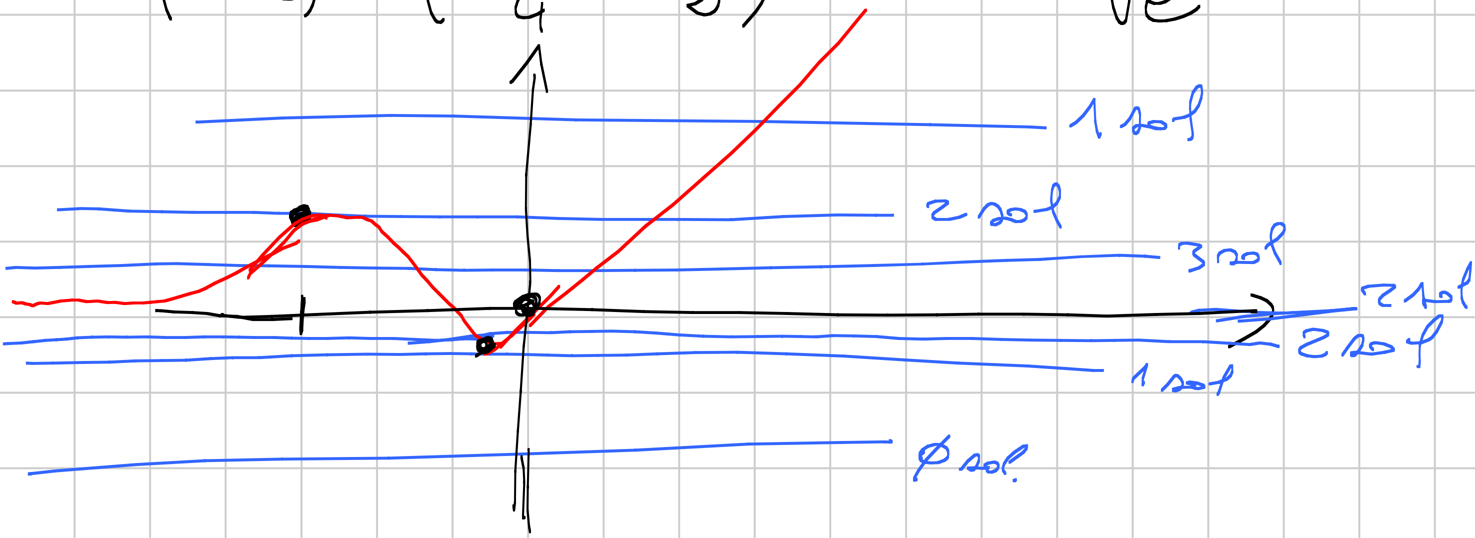
Il segno di f' in un intorno di $x_0=-3$ è dato dal segno di $2x^2+7x+3=g(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} >0 & -3-\delta < x < -3 \\ <0 & -3 < x < 3+\delta \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} <0 & -\frac{1}{2}-\delta < x < -\frac{1}{2} \\ >0 & -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{2}+\delta \end{cases}$$

$$f(-3) = (2\cdot 9 - 3\cdot 3)\cdot e^{-3} = \frac{9}{e^3}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2}\right) e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$



Se $a < -\frac{1}{\sqrt{e}}$ allora ϕ sol.

Se $a = -1/\sqrt{e}$ " 1 sol

" $-\frac{1}{\sqrt{e}} < a \leq 0$ " 2 sol.

" $0 < a < \frac{9}{e^3}$ " 3 sol

" $a = 9/e^3$ " 2 sol

" $\frac{9}{e^3} < a$ " 1 sol

$f(x) = ax^4 + bx + 1$ (se $a=0$ allora $\exists 1!$ sol. se $b \neq 0$)

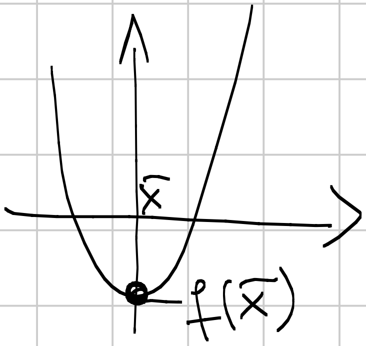
$f'(x) = 4ax^3 + b = 0$ se $\bar{x} = \left(-\frac{b}{4a}\right)^{1/3}$

$$f(\bar{x}) = a\left(-\frac{b}{4a}\right)^{4/3} + b\left(-\frac{b}{4a}\right)^{1/3} + 1$$

$$= -\left(\frac{b}{4a}\right)^{1/3}\left[\cancel{a}\cdot\frac{b}{4\cancel{a}} + b\right] + 1$$

$$= -\left(\frac{b}{4a}\right)^{1/3}\cdot\frac{5}{4}b + 1$$

$a > 0$ $\quad f(\bar{x}) < 0$ se $-\frac{5}{4}b\left(\frac{b}{4a}\right)^{1/3} < -1$



se $\frac{5}{a^{1/3}}\cdot\frac{b^{4/3}}{4^{4/3}} > 1$

se $5\cdot\frac{b^{4/3}}{4^{4/3}} > a^{1/3}$

se $5^3\cdot\frac{b^4}{4^4} > a$

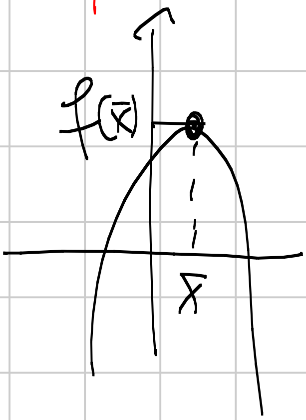
Quindi $f(\bar{x}) = \min f < 0$ se $a < 5^3\cdot\frac{b^4}{4^4}$

Quindi $ax^4 + bx + 1 = 0$ ha 2 sol. se $a < 5^3\cdot\frac{b^4}{4^4}$

ha 1 " " $a = ---$

ha $\emptyset$ " " $a > ----$

$a < 0$ $\qquad f(\bar{x}) = -\left(\frac{b}{4a}\right)^{1/3} \cdot \frac{5}{4} b + 1 < 0$



se $\qquad -\frac{b^{4/3}}{a^{1/3}} < -\frac{4^{4/3}}{5}$

se $\qquad \frac{b^{4/3}}{a^{1/3}} > \frac{4^{4/3}}{5}$

se $\qquad b^{4/3} < \frac{4^{4/3}}{5} a^{1/3}$

se $\qquad \frac{b^{4/3}}{4^{4/3}} \cdot 5 < a^{1/3}$

se $\qquad 5^3 \cdot \frac{b^4}{4^4} < a$ $\qquad$ Impossibile

dunque $\forall b \qquad f(\bar{x}) = \max f > 0$

" $\qquad \forall b \qquad ax^4 + bx + 1 = 0$ ha 2 soluzioni

Def $f: I \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana su I se

$$\exists L > 0 : \left| f(x) - f(y) \right| \leq L |x-y| \quad \forall x,y \in I$$

Pb Come calcolare L ??

Noi sappiamo calcolare "il più piccolo" L valore per cui (*) vale $\forall x,y \in I$

Esempio $f(x) = \frac{x}{4}$ si ha che

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq 400 \cdot |x-y|$$

ma si può fare meglio:

$$\left| \frac{x}{4} - \frac{y}{4} \right| = \frac{1}{4} \cdot |x-y| \leq \frac{1}{4} |x-y|$$

Dire che $\left| f(x) - f(y) \right| \leq L |x-y| \quad \forall x,y \in I \ x \neq y$

equivale a $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L \quad \forall x,y \in I \ x \neq y$

equivale $\quad |R_y(x)| \le L \quad \forall x,y \in I \ \ x \neq y$

equivale $\quad \left\{ \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} |R_y(x)| \right\} \le L$

equivale $\quad \left\{ \sup_{x \in I} |f'(x)| \right\} \le L$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = x^2$ è Lip. su $[0,3]$

$L = ? \ \boxed{=6}$

<u>dim</u>

$f'(x) = 2x \qquad \sup_{x \in [0,3]} |f'(x)| = \sup_{x \in [0,3]} |2x| = 6$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, allora sono equivalenti

1) f è L-Lipschitziana (con $L \in \mathbb{R}$)

2) $\sup_{x \in I} |f'(x)| = L \in \mathbb{R}$

dim

1) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\quad \right) \leq L$

$$\Rightarrow \sup_{x_0} \left[\lim_{x \to x_0} \left(\quad \right) \right] \leq L$$

$$\Updownarrow$$

2)

2) $\sup_{I} |f'(x)| = L$

$\forall x, y \in I \quad \left| \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(\xi)| \leq L \quad \Rightarrow \quad 1)$

$\boxed{\cancel{R}/_{\!D}}$

Titolo nota 30/11/2010

$$f(x) = x^3 + e^x$$

Calcolare, se esiste, la retta tangente alla funzione inversa nel punto $(1+e, 1) \in Graf(f^{-1})$

dim

Tu devo chiedere se $f(x)$ è $\nearrow$ in un intorno di $x=1$. Ma $f'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \nearrow$ su tutto $\mathbb{R}$ e dunque $\exists f^{-1}$ continua su tutto $f(\mathbb{R})$.

Inoltre $f'(1) = 3+e > 0$, e dunque

$$(f^{-1})'(1+e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+e}$$

Possiamo calcolare l'eq. della retta Tg. al grafico di f^{-1} nel punto $(1+e, 1)$, che è

Titolo nota 02/12/2010

$$y - f^{-1}(1+e) = (f^{-1})'(1+e)\cdot\left(x-(1+e)\right)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3+e}\cdot(x-1-e)$$

<u>Domanda</u> $f'(x_0)>0 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x_0)) \gtrless 0$?

<u>Risposta</u> $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$ e dunque

il segno di f' ed il segno di $(f^{-1})'$ in punti corrispondenti è lo stesso

Titolo nota 02/12/2010

Domanda: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow (f^{-1})''(f(x_0)) \gtrless 0$?

Risposta: non si può dire infatti

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ poniamo $g = f^{-1}$

$(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$\Rightarrow \boxed{g'(f(x)) = 1/f'(x)}$ $(*)$

$[g'(f(x)) \cdot f'(x)]' = [1]'$

$g''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x) = 0$

$g''(f(x)) = -g'(f(x)) \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2}$ ma vale $(*)$

$\overset{!}{=} -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

dunque $(f^{-1})''(f(x)) = -\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$

Se $f'(x_0)$ e $f''(x_0) > 0$ allora $(f^{-1})'(f(x_0)) > 0$ $(f^{-1})''(f(x_0)) < 0$

Se $f'(x_0) < 0$ e $f''(x_0) > 0$ " $(f^{-1})'(f(x_0)) < 0$ $(f^{-1})''(f(x_0)) > 0$

Teorema Hopital (forma $0/0$)

$f,g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

1) f,g continue in $]a,b[$,
2) $f(x_0) = g(x_0) = 0$. $0/0$
3) f,g derivabili in $]a,b[\setminus \{x_0\}$
4) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$
5) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Esempi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Titolo nota 30/11/2010

dim

$f(x_0) = g(x_0) = 0$ Teorema Cauchy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

dove $z \in]x, x_0[$ o $z \in]x_0, x[$

ma quando $x \to x_0 \Rightarrow z \to x_0$ e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = l$$

il rapporto delle derivate ha limite per ipotesi

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$\boxed{\cancel{\text{Rip}}}$

Titolo nota 02/12/2010