Derivate - lez. 1

Titolo nota 29/11/2010

$f : [a,b[\to \mathbb{R}$ u.c., $b \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R}$

allora $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & a \le x < b \\ \lim_{x\to b} f(x) & x = b \end{cases}$ è continua in $[a,b]$

VICEVERSA

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (con $a,b \in \mathbb{R}$) continua e

$\exists \lim_{x\to a} f \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to b} f \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f è u.c. su $]a,b[$

SÌ!!

difatti, definita $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ \lim_{x\to b} f(x) & x = b \end{cases}$

$\tilde{f}$ è continua su $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ è u.c.

Teorema Heine Cantor

da cui si deduce che $\tilde{f}_{|]a,b[} = f$ è

u.c. poichè restrizione di una u.c.

Pb: f u.c. $\Longrightarrow f^2$ u.c.? NO!

Infatti, presa $f(x)=x$, questa risulta u.c.

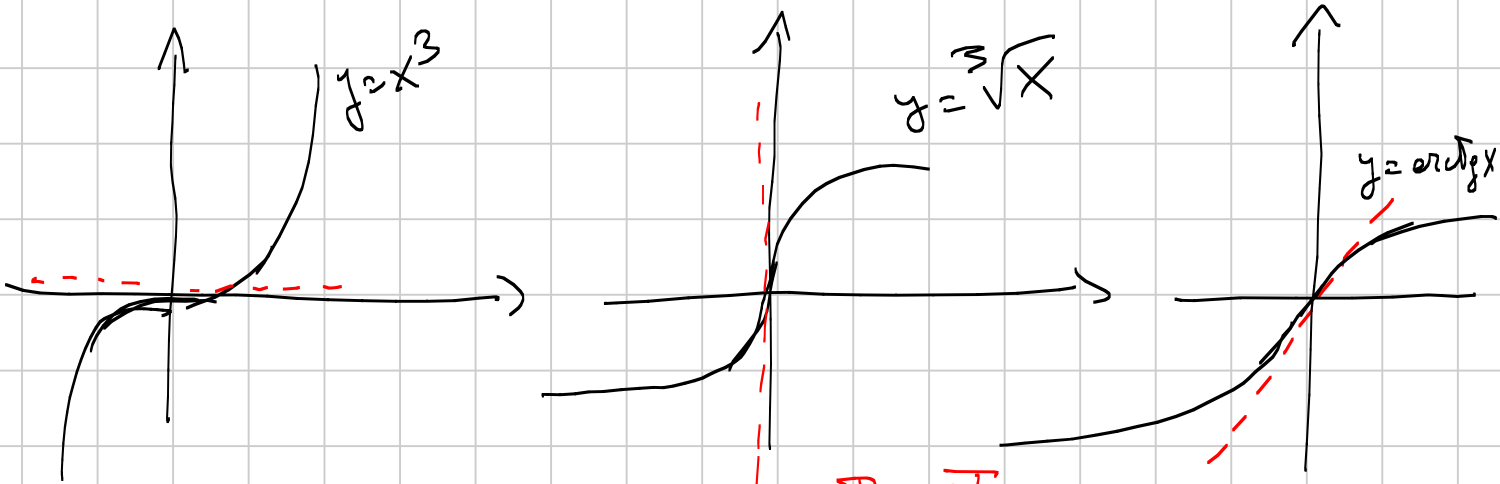
su $[1,+\infty[$ mentre si è provato che $f^2(x)=x^2$ non lo è.

Pb: f è u.c. su $[1, 1000] \Rightarrow f^2$ u.c. su $[1,1000]$?

SI: infatti f u.c. su $[1,1000] \Rightarrow f^2$ continua su $[1,1000]$

$\Longrightarrow f^2$ u.c. su $[1,1000]$

Pb f e g u.c. $\Longrightarrow f+g$ è u.c.? SI



spazio percorso tempo T

spazio percorso tempo T_0

$$\text{Velocità media} = \frac{S(T) - S(T_0)}{T - T_0}$$

$$\text{Velocità}(T_0) = \text{velocità istantanea} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{T \to T_0} \frac{S(T) - S(T_0)}{T - T_0} \quad \text{(se esiste)}$$

↑

Interpretazione Fisica

Interpretazione geometrica (di derivata)

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ & p.d.a. per A

mi chiedo

"esistono $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) - [a(x - x_0) + b] = o((x - x_0)) \quad x \to x_0 \text{ "?}$$

Intanto scopro che, passando al limite per $x \to x_0$,

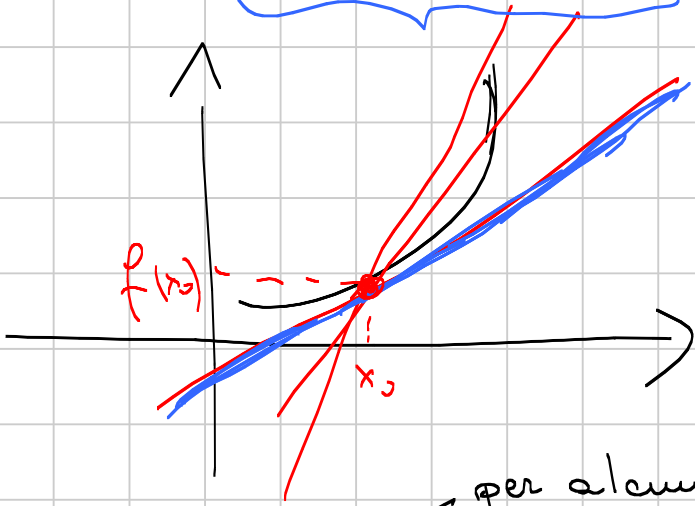
necessariamente si ha $f(x_0) - b = 0$

ovvero $b = f(x_0)$

Riformulo la domanda: date

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ & p.d.a. per A

"$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) - \alpha(x - x_0) - f(x_0) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$"?



La risposta è

- per alcune f.ni regolari, sì!
- per altre f.ni meno regolari, no!

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ & x_0 p.d.a. per A, si dice "f differenziabile in x_0" se

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

ovvero

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) - [f(x_0) + \alpha(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$\alpha =$ differenziale di f in x_0 $\equiv df(x_0)$

$$r(x) := f(x_0) + \alpha(x - x_0) \equiv \begin{cases} \text{equazione della retta tangente} \\ \text{al grafico di } f \text{ in } (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

Oss Il differenziale, se esiste, è unico

Per ass. $\exists \alpha_1, \alpha_2$ t.c. $\begin{cases} f(x) - f(x_0) - \alpha_1(x - x_0) = o(x - x_0) \\ f(x) - f(x_0) - \alpha_2(x - x_0) = o(x - x_0) \end{cases}$ $(x \to x_0)$

$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = o(1) \quad (x \to x_0)$$

ma $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \quad \square$$

Teorema f differenziabile in x_0 allora f continua in x_0

<u>dim</u>

x_0 p.d.a. per A $\quad$ $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$x_0 \in A$

$\exists \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$

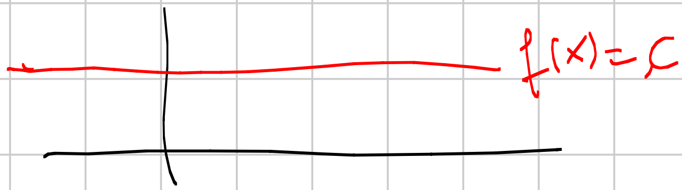
(Hp.) $(*)\; f(x) - f(x_0) = \alpha \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$

Passando al limite in ambo i membri di $(*)$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\alpha (x - x_0) + o(x - x_0) \right) = 0 + 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

Esempio

① $f(x) = c \Rightarrow df(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$



② $f(x) = ax + b \Rightarrow (df)(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $(d \operatorname{sen} x)(0) = 1 \iff \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 - 1\cdot(x-0)}{|x-0|} = 0$

$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{|x|} = 0$ ✓

4) $(d \cos x)(0) = 0 \iff \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0 - 0\cdot(x-0)}{|x-0|} = 0$

$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{|x|} = 0$ ✓

$(d e^x)(0) = 1 \iff \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0 - 1\cdot(x-0)}{|x-0|} = 0$ ✓

$(d \log(1+x))(0) = 1$

Oss Tutte le funzioni continue sono differenziabili

NO!!

Infatti $f(x) = |x|$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

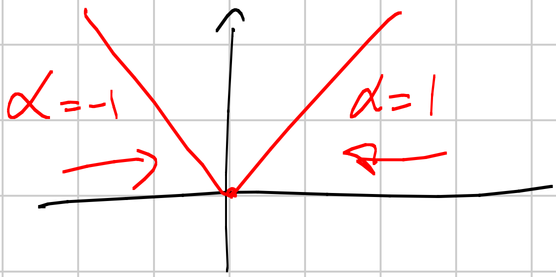
ma " non è differenziabile in $x_0 = 0$

x assurdo $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|-\alpha x}{|x|} = 0 \iff \lim_{x\to 0}\left(1-\alpha\cdot\frac{x}{|x|}\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} (1-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} (1+\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

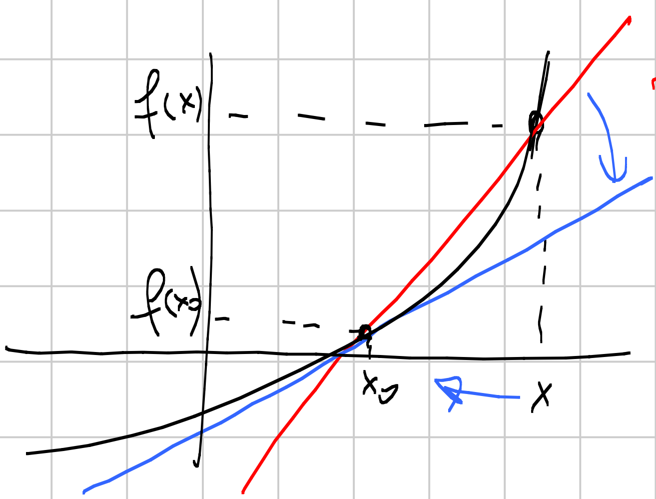
assurdo



Def

Dato $f: A \to \mathbb{R}$, preso $x_0 \in A$ diciamo

Rapporto incrementale di f in x_0 $\equiv R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $x \in A \setminus \{x_0\}$



$R_{x_0}(x)$ è il coeff angolare della retta secante il grafico di f nei punti $(x, f(x))$ $(x_0, f(x_0))$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A & $x_0 \in A$, diciamo "derivata di f in x_0" il valore del

$$\lim_{x \to x_0} R_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

può essere $+\infty$ o $-\infty$

Se questo esiste (finito o infinito) lo indico con

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Newton, Leibniz, operatore

- f derivabile in x_0 $\overset{def}{\iff}$ $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$
- f derivabile $\overset{def}{\iff}$ $\exists f'(x)$ $\forall x \in A$

Derivata destra di f in x_0

$$= f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivata sinistra di f in x_0

$$= f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Legame tra differenziabilità e derivabilità

f differenziabile in x_0 <u>se</u> f derivabile in x_0
olim

Infatti $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} = \alpha \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \\ \& \\ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} = -\alpha \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$

Teorema (località) $\left(f(x)=g(x) \quad f'(x_0)\ \exists \Rightarrow g'(x_0)=f'(x_0) \right)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ & x_0 p.d.a. per A

Se $f(x)=g(x)\ \forall x \in U \in \mathcal{U}_{x_0}$ ed $\exists\, f'(x_0)$

allora $\exists\, g'(x_0) = f'(x_0)$

$f \in C^k(A)$ $\quad k=0,1,\dots,n$

se $f, \dots, f^{(k)}$ sono funzioni continue $\forall x \in A$

$f^{(k)}$ ← derivata ordine k

$Df(x_0)$ derivata prima in x_0

$\to D^2 f(x_0) = D(Df)(x_0)$ derivata seconda

$\to \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)(x_0)$ " "

$\to f''(x_0)$

Algebra delle derivate

se le somme ed i prodotti vanno dietro!

① $f, g : A \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0 allora $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

② " " " allora $(f g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

③ $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0

$g : B \to \mathbb{R}$ " " $f(x_0)$

allora $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

dim

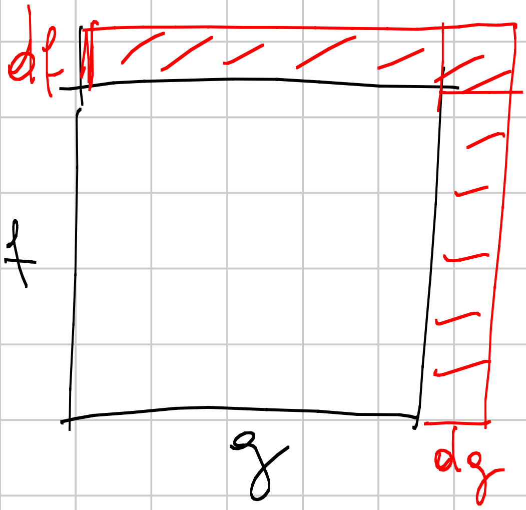
① è banale (limite somma = somma limiti)

② $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

$$\frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0)}{(x - x_0)} = \frac{f(x) g(x) - f(x) g(x_0) \overset{0}{\pm} f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f(x) \underbrace{\frac{[g(x) - g(x_0)]}{(x - x_0)}}_{} + \underbrace{g(x_0)}_{} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{}$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$



$$(f+df)\cdot(g+dg) - f\cdot g$$

$$\cancel{f\cdot g} + \underbrace{f\,dg}_{1} + \underbrace{g\,df}_{2} + \underbrace{df\,dg}_{3} - \cancel{fg}$$

③ $$\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limite prodotto $$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

cambio variabile * $$= \lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$\boxed{y = f(x)}$

$*$ $x \to x_0$

$\Downarrow$

$f(x) \to f(x_0)$ ▨

Si ricavano le seguenti regole di derivazione

(1) $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

Abbiamo provato che $f'(0) = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Preso $x_0 \in \mathbb{R}$ generico

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0}$$

$$y = x - x_0 \quad = e^{x_0} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0}$$

$x \to x_0$
$\Downarrow$
$y \to 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x}$$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo continua e strett. monotona

f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

allora $\exists\, (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

dim

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I \quad , \text{ in particolare vale in } x_0$$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \quad \leftarrow$$

derivata f.ne composta

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(\underset{\text{x hp}}{f'(x_0) \neq 0}\right) \quad \boxed{\cancel{\text{Bip}}}$$

Osservazione

Partendo da $f^{-1}(f(x)) = x \longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

" " $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$

$$\downarrow$$

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) = 1$$

$$\longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Esempio

$$f(x)=\log x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \qquad (\forall x>0)$$

dim

$$f(x)=g^{-1}(x) \quad \text{dove} \quad g(x)=e^x$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{g'(f(x_0))}=\frac{1}{e^{f(x_0)}}=\frac{1}{e^{\log x_0}}=\frac{1}{x_0}$$

Esempio

$$f(x)=\operatorname{arctg} x \qquad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

dim

ancora 1 passaggio

Esempio

$$g=1/f \longrightarrow g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

dim

$$g(x)=\left[f(x)\right]^{-1} \quad \text{e supponiamo} \quad f(x)>0$$

$$=e^{-\log f(x)} \qquad \text{dunque}$$

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{h} -\log f(x) \xmapsto{\ell} e^{-\log f(x)}$$

$$h(y) = -\log y \qquad \ell(z) = e^{z}$$

dunque $\displaystyle g(x) = \frac{1}{f} \equiv (\ell \circ h \circ f)(x)$

dunque $\displaystyle g'(x) = \ell'(h(f(x))) \cdot h'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$= e^{h(f(x))} \cdot \left(-\frac{1}{f(x)}\right) \cdot f'(x)$$

$$= e^{-\log f(x)} \cdot \left(-\frac{1}{f(x)}\right) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{f(x)} \cdot \left(-\frac{1}{f(x)}\right) \cdot f'(x) = -\frac{f'}{f^2(x)}$$

$\square$

Esempio

$$\frac{f}{g}(x) \rightsquigarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

dim

infatti $\displaystyle \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x)$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Exemplo

$$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f'(x) = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \cos x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}((x - x_0) + x_0) - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(x - x_0) \cdot \cos x_0 + \cos(x - x_0) \cdot \operatorname{sen} x_0 - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$$

$$= \cos x_0 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(x - x_0)}{x - x_0} + \operatorname{sen} x_0 \lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}$$

$\boxed{y = x - x_0}$

$$= \cos x_0 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} + \operatorname{sen} x_0 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y}$$

$$= \cos x_0$$

Analogamente

Esempio

$$(\cos x)'(x_0) = -\operatorname{sen} x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$f = Tg(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + Tg^2(x)$$

benale

dim

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + Tg^2 x$$

Esempio

$f(x) = \operatorname{arctg} x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$

dim

Per calcolare la derivata di $\operatorname{arctg} x$ ho bisogno

1 - della derivata di $\operatorname{Tg} x$

2 - del Teorema di derivazione dell'inversa

Posto $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \operatorname{Tg} x$

si ha

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{1+\operatorname{Tg}^2(f(x))}$$

$$= \frac{1}{1+\left[\operatorname{Tg}(\operatorname{arctg} x)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$