Titolo nota 22/11/2010

Teorema (Corollario teorema esistenza zeri)

- $f \in C^0(I) \equiv \{g : I \to \mathbb{R} \;:\; g \text{ continua } \forall x \in I\}$
- I intervallo
- $f(a) \leq K \leq f(b)$ $\quad K \in \mathbb{R}$

Allora $\exists\, z \in [a,b]$ t.c. $f(z) = K$

dim Ci riconduciamo al Teorema di $\exists$ degli zeri

Presa $g(x) = f(x) - K$ $\qquad g(a) = f(a) - K \leq 0$

g continua $\qquad g(b) = f(b) - K \geq 0$

Si ha che $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ e la tesi segue dal Teorema precedente applicato a g

■

Proviamo che le f.ni continue mandano intervalli in intervalli

Teorema (Intervallo $\xrightarrow{f \text{ continua}}$ Intervallo)

$f \in C^0(I)$ con I intervallo

$\Rightarrow f(I)$ è un intervallo

dim

TS presi $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma < \beta \Rightarrow \gamma \in f(I)$

Ma $\alpha, \beta \in f(I) \Rightarrow \alpha = f(x_\alpha) \quad \beta = f(x_\beta)$

dunque $\left.\begin{array}{l} f(x_\alpha) < \gamma < f(x_\beta) \\ f \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \bar{x} \in I : f(\bar{x}) = \gamma$

Teorema

$f \in C(I)$, I intervallo

$\Rightarrow f(I)$ è un intervallo di estremi

$\inf\limits_{I} f$ e $\sup\limits_{I} f$

dim

S $\forall \gamma : \inf\limits_{I} f < \gamma < \sup\limits_{I} f \Rightarrow \gamma \in f(I)$

$\gamma \in \left]\inf\limits_{I} f, \sup\limits_{I} f\right[\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in f(I)$ t.c. $\alpha < \gamma < \beta$

ma $\alpha = f(x_\alpha)$ $\beta = f(x_\beta)$ e f continua

$\Rightarrow$ per il Teorema $\exists$ zeri $\exists\, \bar{x} \in I : f(\bar{x}) = \gamma$

$\boxed{\text{RIP}}$

Esercizio determinare, attraverso il metodo di bisezione le (eventuali) radici dell'equazione $f(x)=0$ in $[0,3]$, dove

$f(x) = 3 - x^2$ (la rad. è $x=\sqrt{3}$!)

dunque f è continua

$f(0) = 3 > 0 > f(3) = -6$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ Thm $\exists$ zeri $\exists$ 1 radice (almeno!)

p.to medio $\frac{3+0}{2}$

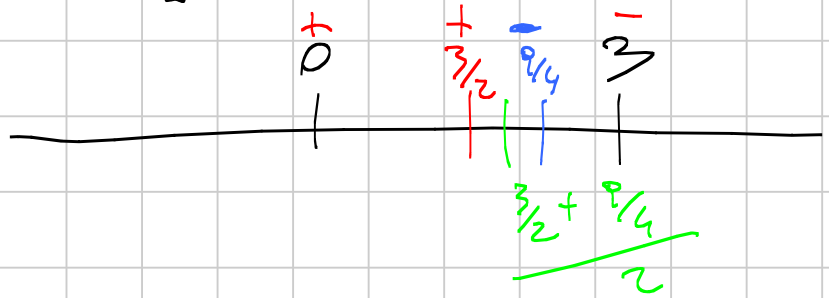
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} > 0 > f(3) = -6$

$\Rightarrow [a_1, b_1] = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ $\left(f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f(3) < 0 !\right)$

$f\left(\frac{9}{4}\right) = 3 - \frac{81}{16} = \frac{48-81}{16} < 0 < f\left(\frac{3}{2}\right)$

(*) (*)

$\Rightarrow [a_2, b_2] = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$ etc



Problema f continua & $f(a) \cdot f(b) > 0 \overset{??}{\Rightarrow} \nexists$ radici in $[a,b]$

NO!!!

Problema f continua & $f(a) f(b) < 0 \overset{??}{\Rightarrow} \exists!$ radice in $[a,b]$

NO!!!

Teorema

Se $f \in C^0(I)$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

1) f iniettiva
2) f monotona strettamente

dim

2) $\Rightarrow$ 1)

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

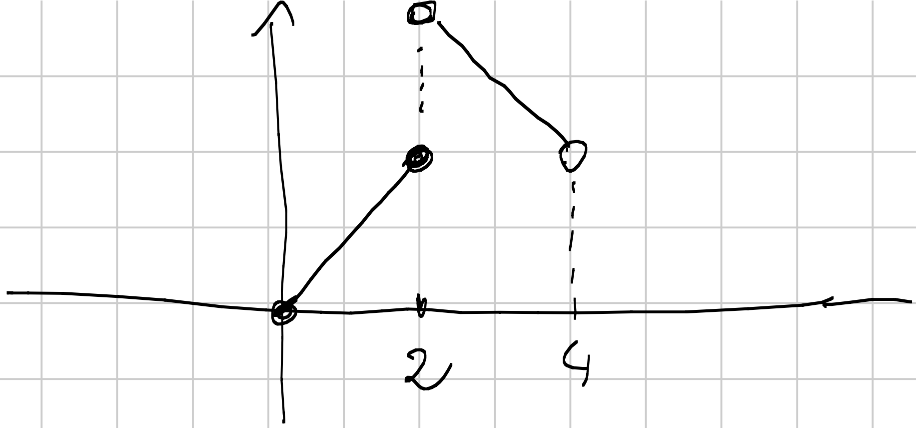
$\Downarrow$

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ iniettività

NON UTILIZZO la continuità!!

1) $\Rightarrow$ 2) vedi libro

Questo è più difficile perché uso pesantemente la continuità (infatti esistono f.ni iniettive che NON sono monotone ma non sono neppure continue)



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2 \\ 6-x & 0<x<4 \end{cases}$$

la funzione f è iniettiva

non è monotona

non è continua

<u>Teorema</u>

$f : I \to J$ continua e invertibile

$\Rightarrow f^{-1} : J \to I$ è continua

(no dim)

Questo risultato serve quando calcolo la derivata di f^{-1}

Quando $\inf_I f = \min_I f$?

" $\sup_I f = \max_I f$?

Teorema (di Weierstrass)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

[a,b] intervallo chiuso limitato

Allora $\exists\, x_m \in [a,b] : f(x_m) = \min\limits_{[a,b]} f$

$\exists\, x_M \in [a,b] : f(x_M) = \max\limits_{[a,b]} f$

dim

Sia $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ $\quad M$ è p.d.a. per $f([a,b])$

$\Rightarrow \exists \{y_n\}_n \subset f([a,b]) \quad y_n \to M$

$\Rightarrow$ essendo $y_n \in f([a,b])$, $\exists\, x_n \in [a,b] \quad f(x_n) = y_n$

Considero $\{x_n\} \subset [a,b]$: successione LIMITATA

$\Rightarrow$ x il Thm di Bolzano Weierstrass

esiste $\{x_{k_n}\}_n$ sottosuccessione convergente a z

$$x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in [a,b]$$

$$\Rightarrow f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$$

($f(x_{k_n})$ è sottosucc. e quindi tende allo stesso limite di y_n)

$$f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z)$$

(x chè f è continua in z)

$$\Longrightarrow \quad f(z) = M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \boxed{\diagup\diagup}$$

Oss ① $f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow f$ limitata

(infatti $\min\limits_{[a,b]} f \le f(x) \le \max\limits_{[a,b]} f \quad \forall x \in [a,b]$)
x Thm Weierstrass

② $f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow f([a,b]) = [\min f, \max f]$

Controesempio (al Teorema di Weierstrass)

$$\begin{cases} f \in C^0(I) \text{ ma } I \text{ non è chiuso} \\ f(x) = x \quad I = [0,1[\end{cases} \Longrightarrow \nexists \max_{[0,1[} f$$

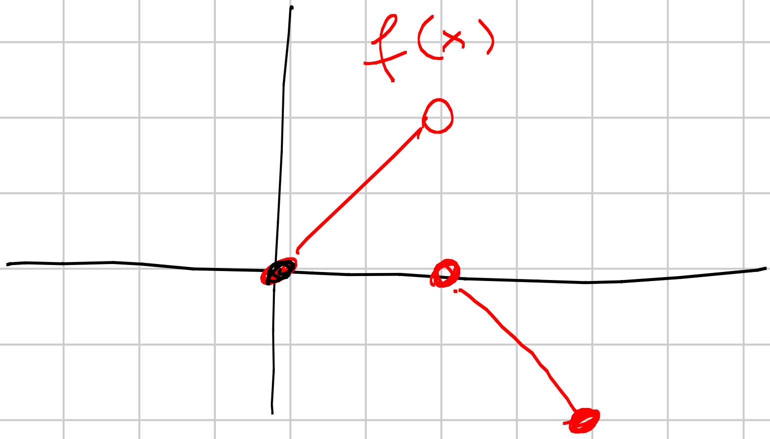
$$\sup_{[0,1[} f = 1 \notin f([0,1[)$$

$$\begin{cases} f \in C^0(I) \text{ ma } I \text{ non è limitato} \\ f(x) = e^x \quad I =]-\infty, 0] \end{cases} \Longrightarrow \nexists \min_{]-\infty,0]} f$$

$$\inf_{]-\infty,0]} f = 0 \notin f(]-\infty,0])$$

$$\begin{cases} f \text{ non è continua su } [0,2] \\ f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 1-x & 1 \le x \le 2 \end{cases} \quad I = [0,2]. \end{cases} \Longrightarrow \nexists \max_{[0,2]} f$$

$$\sup_{[0,2]} f = 1 \notin f([0,2])$$



in quanto $\sup f = 1$, ma $[0,2]$

$1 \notin f([0,2])$

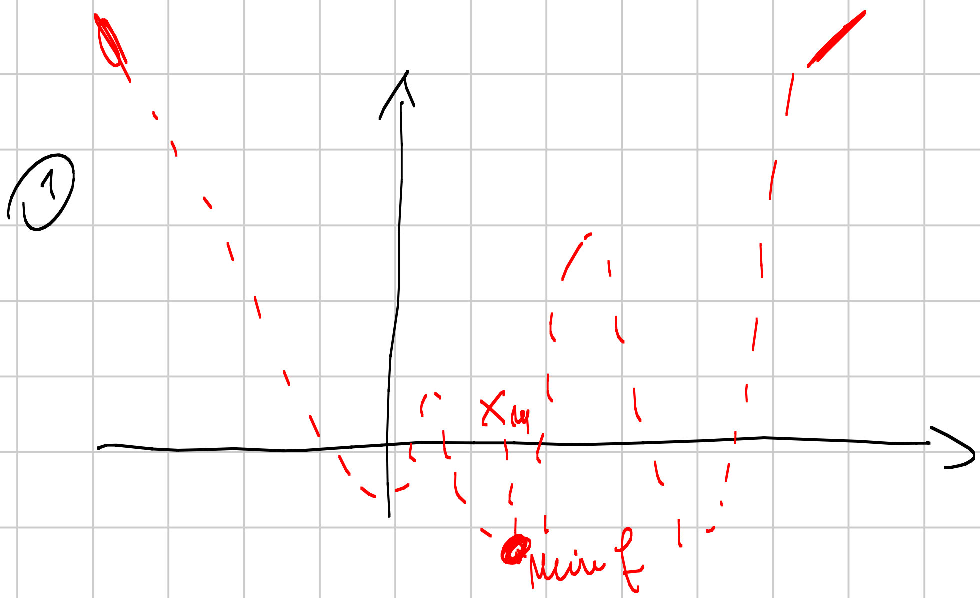
Corollario (Teorema Weierstrass)

$f \in C^0(\mathbb{R})$

1) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists \min_{x \in \mathbb{R}} f$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists \max_{x \in \mathbb{R}} f$

3) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \Rightarrow \exists \min_{x \in \mathbb{R}} f$ o $\exists \max_{x \in \mathbb{R}} f$



Hp $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{R} : |x| > N \Rightarrow f(x) > M$

$(+\infty)$ $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R} : x > N \Rightarrow f(x) > M$

$(-\infty)$ " " $: x < N \Rightarrow$ "

prendo $x_0 = 0$ e sia $\underline{\underline{f(0) = M}}$

$$\exists N = N(f(0)) > 0 \quad |x| > N \Rightarrow \underline{f(x) > M}$$

Posto

$$\mathbb{R} =]-\infty, -N[\cup [-N, N] \cup]N, +\infty[$$

si ha che

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min \left\{ \min_{]-\infty,-N[} f, \min_{[-N,N]} f, \min_{]N,+\infty[} f \right\}$$

$$\geq \min \left\{ \underbrace{\min_{]-\infty,-N]} f}_{\geq M}, \underbrace{\min_{[-N,N]} f}_{\leq M}, \underbrace{\min_{[N,+\infty[} f}_{\geq M} \right\}$$

$$= \min_{[-N,N]} f = f(z) \qquad z \in [-N, N]$$

Weierstrass

$\boxed{\mathbb{R}_x \mathcal{P}}$

In sostanza, ci si riduce da intervallo illimitato a un intervallo limitato.

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

OSS Si utilizzano per provare che

se f continua su $[a,b]$ allora f integrabile su $[a,b]$

OSS f continua in x_0

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \boxed{\delta = \delta(x_0, \varepsilon)} : \ldots$

dipende da ε ma anche da x_0

Mentre per le funzioni u.c. $\delta = \delta(\varepsilon)$

OSS continuità di f in $x_0 \equiv$ concetto locale

Unif. continuità (u.c.) $\equiv$ concetto globale

Def $f: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>lipschitziana</u>

se $\exists L>0$: $|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y \in I \quad (*)$

Se f è lipschitziana, la più piccola costante L per cui $(*)$ è verificata si dice "costante di Lipschitz" e si dice f L-lipschitziana

Oss Se f L-lipschitziana allora

$$\forall x,y \in I \quad x \neq y \qquad \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le L$$

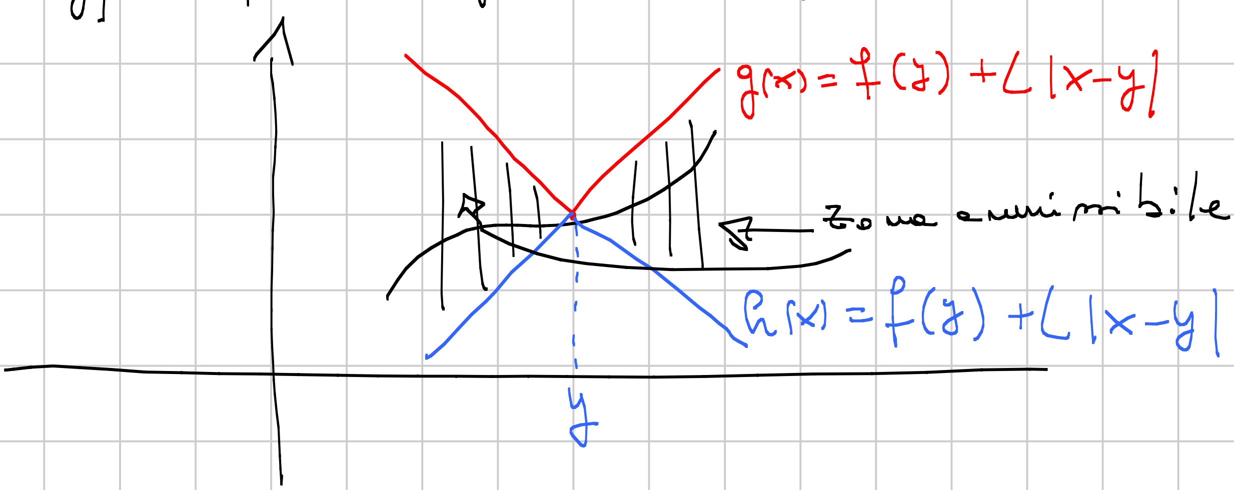
(Rapporto incrementale limitato)

<u>Geometricamente</u>

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$$

$$-L|x-y| \le f(x)-f(y) \le L|x-y|$$

$$f(y)-L|x-y| \le f(x) \le f(y)+L|x-y|$$



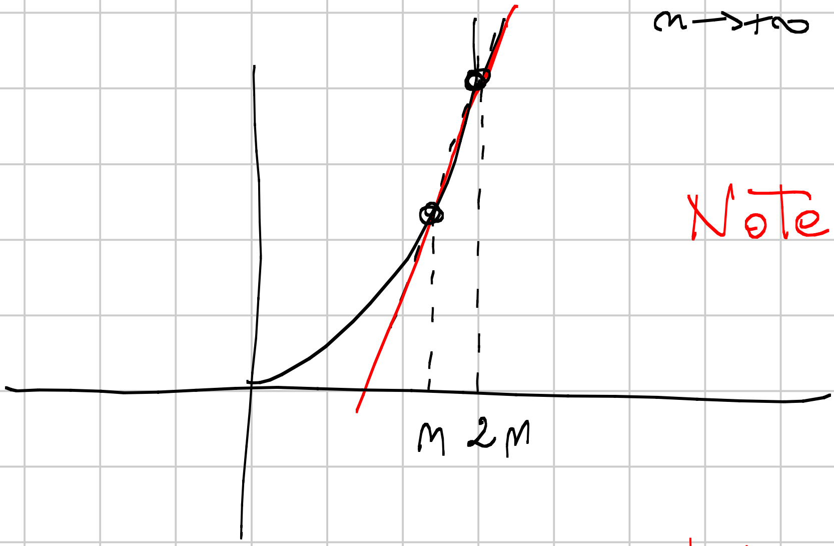
Esempio ◦) $f(x) = 4x$ è 4-Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$

◦◦) $f(x) = x^2$ non è Lipschitziana su $[0,+\infty[$

infatti, presi $x = n$ e $y = 2n$ si ha che

$$\frac{f(y)-f(x)}{|y-x|} = \frac{(2n)^2-(n^2)}{|2n-n|} = \frac{(\cancel{2n-n})(2n+n)}{(\cancel{2n-n})}$$

$$= 3n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$



Nota: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ altro non è che il coeff angolare della retta che passa per

$(x, f(x))$ e $(y, f(y))$

Teorema Se $f : I \to \mathbb{R}$ è L-Lipschitziana allora f è continua $\forall x \in I$

dim

fissato $x_0 \in I$ dove devo provare la continuità, si ha per ipotesi che

$$|f(x) - f(x_0)| \underset{f \text{ Lipschitz.}}{\leq} L\,|x - x_0| \underset{|x-x_0|<\delta}{<} L \cdot \delta = \varepsilon$$

chiedo (mi basta!)

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0 \ ; \ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Oss il $\delta = \varepsilon/L = \delta(\varepsilon)$ non dipende da x_0, ovvero questo prova che

f Lip. $\Rightarrow$ f UNIF. CONTINUA

(Come vedremo: ancora non s'è def cosa sia f unif. continua)

Oss il viceversa non vale

$f=x^2$ è continua su $[0,+\infty[$ ma non è lipschitz.

Esercizio

$f(x)=\sqrt{x}$ NON è lipschitziana su $[0,1]$

$$\nexists \quad \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|}=+\infty$$

$x_n=\frac{1}{n} \qquad y_n=\frac{1}{2n}$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{2n}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}}=\frac{\cancel{\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{2n}}}}{\cancel{\left(\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)}=Q_n$$

$$Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{0^+}=+\infty$$

Esercizio $f(x)=\sqrt{x}$ è lipschitziana su $[1,+\infty[$

dim

Presi $x>y\geq 1$ si ha

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{infatti} \quad \sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 2 \quad \forall x,y \geq 1 \right)$$

dunque $\forall x,y \in [1,+\infty[\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x-y|$!!

Def $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, si dice

uniformemente continua su I

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall x,y \in I \ \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Teorema (u.c. $\Rightarrow$ c.)

Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, è unif. continua

su I allora è continua $\forall x \in I$

dim

fissato $x_0 \in I$

$\nexists\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0 : \forall x \in I\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

ma questo segue dalla def di u.c. prendendo

$y = x_0$!!

$\blacksquare$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ L-Lipschitziana su I

allora f è unif. continua su I

dim

$\exists L : |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ (Hip)

dunque, prendendo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ si ha

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \forall x, y \in I\ |x-y|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\blacksquare$

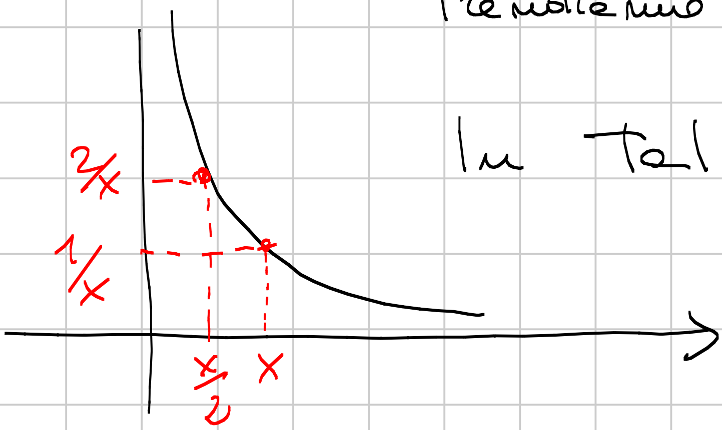
f. Lipschitz. $\Rightarrow$ f unif. continua $\Rightarrow$ f continua

$\nLeftarrow$ $\qquad$ $\nLeftarrow$

↖ vedere del Teorema di Heine Cantor

<u>Esempio</u> $f(x) = 1/x$ non è u.c. su $]0,1]$

<u>dim</u>



Prendiamo $|y-x| = \frac{x}{2}$

In tal modo si ha che

$$\left|x - \frac{x}{2}\right| = \frac{x}{2} \qquad \text{mentre} \qquad \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

e dunque, preso $\varepsilon = 1$, comunque si fissi $\delta > 0$

$$\exists \; x_\delta \in]0,1] \quad y_\delta = \frac{x_\delta}{2} \quad \text{t.c.} \quad |x_\delta - y_\delta| = \frac{x_\delta}{2} < \min\left(\delta, \frac{1}{2}\right)$$

$$\& \quad \left|\frac{1}{y_\delta} - \frac{1}{x_\delta}\right| = \frac{1}{x_\delta} > \frac{1}{\min(2\delta, 1)} \geq 1$$

dunque $1/x$ <u>non</u> <u>è</u> u.c. (si può utilizzare Heine Cantor!!)

Teorema (Heine Cantor)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua allora f è u.c. su $[a,b]$

dim

Xassurdo non (f u.c.) -

$\Longleftrightarrow$ non $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x, y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)$

$\Longleftrightarrow \exists \bar{\varepsilon} > 0 \quad \forall \delta \quad \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \bar{\varepsilon}$

$\Rightarrow \exists \bar{\varepsilon} > 0 \ \forall n \ \exists x_n, y_n \in [a,b] \ |x_n - y_n| < 1/n \ \& \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

$\{x_n\} \subset [a,b] \Rightarrow$ (Thm Bolzano Weierstrass) $\exists x_{k_n} \to \ell \in [a,b]$

Dunque $-\frac{1}{n} < y_{k_n} - x_{k_n} < 1/n$

$$\text{"} \quad x_{k_n} - \frac{1}{n} < y_{k_n} < x_{k_n} + 1/n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$$

$$x_{k_n} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

dunque anche $y_{k_n} \longrightarrow \ell$

Quindi $\forall n \ \exists x_{k_n}, y_{k_n} : |x_{k_n} - y_{k_n}| < 1/n \ \& \ |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$

ma $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(\ell)$
$f(y_{k_n}) \xrightarrow{n \to \infty} f(\ell)$ x la continuità Assurdo $\boxed{R_{i\ell}}$

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$ è UNIF. CONTINUA su $[0,1]$

" NON è Lipschitziana su $[0,1]$

Non so quanto valgono ma so che $\exists$

Teorema

$(a, b \in \mathbb{R})$

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ uniformemente continua

allora $\exists \lim_{x \to a^+} f \in \mathbb{R}$ ed $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$

dim

Vediamo cosa accade in b! (in a è analogo)

Hip $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in]a,b[\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ts $(\exists l \in \mathbb{R}) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in]b-\delta, b[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Presa $\{x_n\} \subset]a,b[\ x_n \to b$, si ha che $\{x_n\}$ è di Cauchy $\overset{\text{f.u.c.}}{\Rightarrow}$

$\{f(x_n)\}$ è di Cauchy, e dunque converge a l: $f(x_n) \to l_x \in \mathbb{R}$

Presa $\{y_n\} \subseteq]a,b[\ y_n \to b$, $\{y_n\} \neq \{x_n\}$, si ha che

$f(y_n)$ è di Cauchy e $f(y_n) \to l_y$

Se ora prendo $z_n : \begin{cases} z_{2n+1} = x_n \\ z_{2n} = y_n \end{cases}$ si ha che $z_n \to b$

$\{f(z_n)\}$ è di Cauchy e dovrà avversi

$$f(x_n) \to l_z \leftarrow f(y_n)$$
$$\uparrow$$
$$f(z_n)$$

$\Rightarrow \forall \{a_n\} \subseteq]a,b[$, $a_n \to b$, si ha $f(a_n) \to l$

$\Rightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = l$ $\boxed{\cancel{R/e}}$

Come si applica

__Esempio__ $f(x) = 1/x$ è continua su $]0,1]$

ma __non è__ u.c. su $]0,1]$

__Dim__

Infatti $\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \notin \mathbb{R}$ e quindi, per il

Thm precedente, $1/x$ NON è U.C. su $]0,1]$ $\boxed{\cancel{R/e}}$

__Problema__ (rovesciare il Thm precedente)

Data $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ t.c. $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$

allora f è u.c. su $[a,b[$??

SI (perché?)

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ è U.C. su $[1, +\infty[$

dim

dimostrarlo direttamente è difficile

È invece facile provare che

f è Lipschitziana su $[1, +\infty[$

Infatti $\forall y > x \geq 1$

$$\frac{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|}{|x-y|} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{y-x} = \frac{1}{x \cdot y} \leq 1$$

ovvero $1/x$ è 1-Lipschitziana su $[1, +\infty[$

e ne segue che $1/x$ è U.C. su $[1, +\infty[$

$\boxed{\text{R.I.P.}}$