Serie a termini di segno alterno

Titolo nota 22/11/2010

Diamo un criterio di convergenza per le serie del tipo

$$\boxed{\sum_n (-1)^n \cdot a_n}$$

Caso particolare delle serie a termini di segno $\forall$

dove $\{a_n\}_n$ è una successione reale che soddisfa opportune ipotesi

Teorema (Criterio Leibniz)

Sia data la serie $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$

Se
① $a_n \geq 0 \quad \forall n$
② $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$
③ $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

allora $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge.

① ci dice che il segno dipende solo da $(-1)^n$ poiché $a_n \geq 0$

② Voglio che i contributi dati dai singoli termini decrescano in modulo

③ ← è la condizione necessaria che ne la chiede

Oss: ① Questo Teorema si può estendere a

"$\sum_n a_n b_n$ ① $a_n \geq 0$ ② $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$ ③ $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

④ $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_n a_n b_n$ converge"

Esempio $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ (Senza il $(-1)^n$ è una serie divergente: la serie armonica)

$S_1 = -1$

$S_2 = S_1 + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$S_3 = S_2 + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$

$S_4 = S_3 + (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{12}$

$S_1 < S_3 < S_5 \quad \Big\{ \quad S_6 < S_4 < S_2$

Questo esempio suggerisce che $S_{2n+1} \nearrow$, $S_{2n} \searrow$, sono entrambe limitate, e tendono al meno stesso limite S = somma serie

② Con questo Teorema si prova che

$$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

- converge assolutamente (e quindi converge) $\forall \alpha > 1$ (perché?)
- converge (ma non assolutamente) $\forall \alpha \in]0,1]$: (perché?)
- non converge quando $\alpha \leq 0$ (perché)

<u>dim.</u> (del criterio di Leibniz)

Ponendo $S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot a_k$ $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{N \to +\infty} S_N = l \in \mathbb{R}$

Sapendo che $\{S_N\}_N = \{S_{2N}\}_N \cup \{S_{2N+1}\}_N$

$\Leftrightarrow$ equiv $\lim_{N \to +\infty} S_{2N} = \lim_{N \to +\infty} S_{2N+1} = l \in \mathbb{R}$

Studiamo S_{2N}

① S_{2N} è monotona $\searrow$

$$S_0 \geq S_2 = (-1)^0 \cdot a_0 + (-1)^1 \cdot a_1 + (-1)^2 \cdot a_2 = S_0 - \overbrace{(a_1 - a_2)}^{\overset{0}{\wedge\!|}}$$

Suppongo $S_{2N} \leq S_{2N-2}$ $\Leftrightarrow$ $S_{2N+2} \leq S_{2N}$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + (-1)^{2N+1} a_{2N+1} + (-1)^{2N+2} \cdot a_{2N+2}$$

$$= S_{2N} - \underbrace{(a_{2N+1} - a_{2N+2})}_{\geq 0} \leq S_{2N}\,!$$

(2) S_{2N+1} è monotona crescente

- $S_1 \leq S_3 = S_1 + (-1)^2 \cdot a_2 + (-1)^3 a_3 = S_1 + \overbrace{(a_2 - a_3)}^{\geq 0}$

- Suppongo che $S_{2N+1} \geq S_{2N-1}$

$\overline{\text{Ts}}$ $S_{2N+3} \geq S_{2N+1}$

$$S_{2N+3} = S_{2N+1} + (-1)^{2N+2} \cdot a_{2N+2} + (-1)^{2N+3} a_{2N+3}$$

$$= S_{2N+1} + \underbrace{(a_{2N+2} - a_{2N+3})}_{\geq 0}$$

(3) Si dimostra ora che, $\forall N$

$$S_{2N+1} \leq S_{2N}$$

$S_1 \leq S_0$ infatti $S_1 = S_0 + (-1)^1 a_1 = S_0 - a_1 \leq S_0$

Hp. $S_{2N+1} \leq S_{2N}$

$\overline{\text{Ts}}$ $S_{2N+3} \leq S_{2N+2}$

$$S_{2N+3} = S_{2N+2} + (-1)^{2N+3} \cdot a_{2N+3} = S_{2N+2} - a_{2N+3} < S_{2N+2}$$

(4) S_{2N} è limitata

$S_{2N} \leq S_0 \ \forall N$ (è $= \downarrow$)

$$S_{2N} \geq S_{2N+1} \ \forall N \implies S_{2N} \geq S_1 \ \forall N$$

(5) S_{2N+1} è limitata

$S_{2N+1} \geq S_1 \quad \forall N \quad$ (è $\nearrow$)

ma $S_{2N} \geq S_{2N+1} \quad \forall N \implies S_0 \geq S_{2N+1} \ \forall N$

__Conclusioni__

$\exists \lim_{n \to +\infty} S_{2N} = S_d$ (è monotona e limitata)

$\exists \lim_{n \to +\infty} S_{2N+1} = S_1$ (è monotona e limitata)

Ma $S_{2N+1} = S_{2N} + (-1)^{2N+1} \cdot a_{2N+1}$

$$0 \leq \left| S_{2N+1} - S_{2N} \right| = \left| (-1)^{2N+1} \cdot a_{2N+1} \right| = |a_{2N+1}|$$

$$S_{2N+1} \to S_1, \quad S_{2N} \to S_d, \quad |a_{2N+1}| \to 0$$

$\boxed{\cancel{Rip}}$

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{convergente assolut.} & \alpha > 1 \\ \text{" semplice} & 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{NON CONVERGE} & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$\alpha = 0$ $\sum_n (-1)^n$ (NON CONVERGE)

$\alpha \leq 0$ Il Termine generale $(-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$

(NON CONVERGE)

Oss. $|S_{2N+1} - S_{2N}| \leq |a_{2N+1}|$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} |S - S_{2N}| \leq |a_{2N+1}| \\ \text{come pure} \\ |S - S_{2N+1}| \leq |a_{2N+1}| \end{cases}$$

Questo mi dice che se mi fermo a S_7, l'errore commesso sarà inferiore ad a_7 in quanto

$$|S - S_7| \leq a_7$$

Analogamente $|S - S_6| \leq a_7$

Esercizio (molto difficile) $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty$

Oss. $\sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_n a_n$ converge semplic.

Per un Teorema di Riemann, esiste un riordinamento dei suoi termini t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\mu(n)} = -\infty$$

Più in generale, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ un riarrangiamento

$\delta = \delta(x)$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\delta_n} = x$

Funzioni continue su un intervallo

Osservazione

Data $f : A \to \mathbb{R}$

1) continua $\forall x \in A$

2) x_0 p.d.a. per A , $x_0 \notin A$

3) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

allora la f.ne $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$

definita da $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$

è continua $\forall x \in A \cup \{x_0\}$

(si tratta di verificare la sola continuità in x_0)

Esempio La funzione $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ continua in x_0

Allora f è limitata in un intorno di x_0

(analogo al Teorema ~~dello~~ della permanenza del segno)

Se x_0 è isolato, non c'è nulla da provare *(olim)*

Se " " p.d.a. per A allora

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

(questo vale se x_0 p.d.a. A)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A$

$$\Longrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

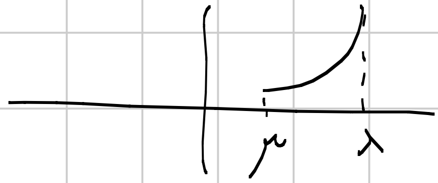
$\varepsilon = 1 \ \exists \delta(1) > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A \Rightarrow \underbrace{f(x_0) - 1}_{\text{numero fissato}} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + 1}$

$|\mathbb{R}| \ \cancel{\mathbb{R}}$

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda = \sup A < +\infty$ $\quad \mu = \inf A > -\infty$

$f: A \to \mathbb{R}$ continua



f debolmente crescente $\quad \left(\lambda = \sup A \quad \mu = \inf A \right)$ p.d.A. per A

① $\sup\limits_A f = \lim\limits_{x \to \lambda^-} f(x)$ $\qquad \inf\limits_A f = \lim\limits_{x \to \mu^+} f(x)$

② f continua su $A \cup \{\mu, \lambda\}$

allora $\sup\limits_A f = \underset{f(\sup A)}{f(\lambda)}$ $\quad \inf\limits_A f = \underset{f(\inf A)}{f(\mu)}$

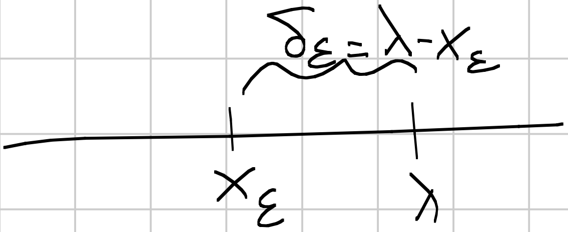
dim

①

a) $l = \sup\limits_A f \iff$ a) $\begin{cases} f(x) \leq l \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \quad l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \end{cases}$

b) $f \nearrow_=$ $\qquad$ b) $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq l \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A : \ \forall x \in A, x \geq x_\varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \end{cases}$$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in]\lambda - \delta_\varepsilon, \lambda[\cap A \quad l - \varepsilon < f(x) \leq l$

Ma questa scrittura altro non è che

$$\lim_{x \to \lambda^-} f(x) = l^- = \sup_{x \in A} f(x)$$

(2) Qualora $\lambda \in A$, sempre che λ p.d.a. per A,

si ha $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in]\lambda - \delta_\varepsilon, \lambda] \cap A \quad f(\lambda) - \varepsilon < f(x) \leq f(\lambda)$

In modo perfettamente analogo si procede per il caso dell'estremo inferiore

$\boxed{R, P}$

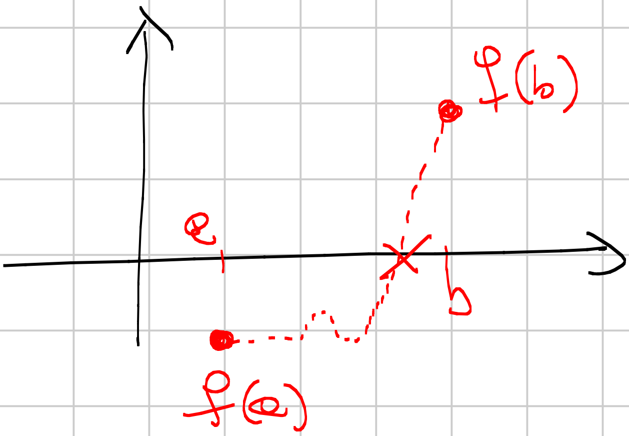
Teorema ($\exists$ degli zeri)

Data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $[a,b]$ intervallo

- f continua $\forall x \in [a,b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (agli estremi ho segni discordi)

allora $\exists\, z \in \,]a,b[\, : f(z) = 0$.

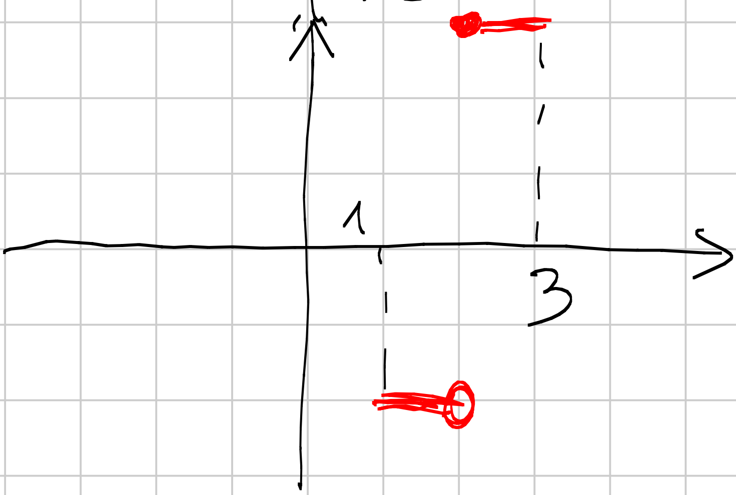
GRAFICAMENTE



Controesempio

Se f non è continua su $I=[a,b]$ $f(a)f(b)<0$ non è detto valga la tesi

infatti $f(x) = \begin{cases} -2 & 1 \leq x < 2 \\ +3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

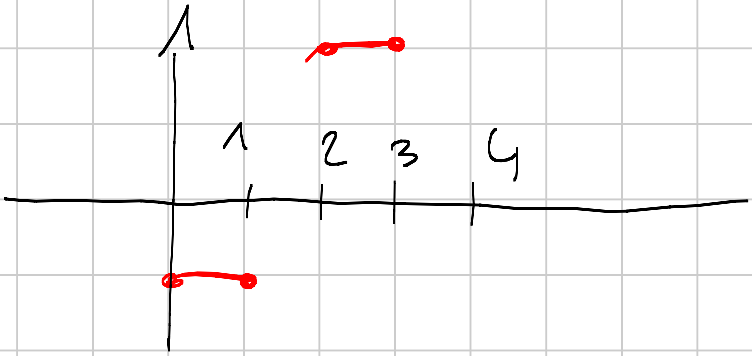


e si vede che questa f.ne NON ATTRAVERSA l'asse x

Controesempio

f continua su I che non è un intervallo pur assumendo estremi segno opposto non è detto valga la Tesi del Teorema

infatti $f(x) = \begin{cases} -1 & 1 \le \; \le 2 \\ 2 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$



OSS La dimostrazione che faremo utilizza il metodo detto "di bisezione" ed è costruttiva: genera esplicitamente un algoritmo per calcolare la radice $\bar{x}$ dell'eq. $f(x)=0$ con approssimazione buona a piacere.

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b = a + \dfrac{b-a}{2^0} \quad (P_0) \\ f(a_0)f(b_0) < 0 \end{cases}$$

Vero per Ipotesi

prendo $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, se $f(m_0) = 0$

ci fermiamo, mentre se $f(m_0) \neq 0$ si ha $[f(m_0)]^2 > 0$ e dunque

$$0 > f(a)f(b) \Rightarrow 0 > f(a_0)f(b_0)[f(m_0)]^2$$

$$= \underbrace{[f(a_0)f(m_0)]}_{1} \cdot \underbrace{[f(m_0) \cdot f(b_0)]}_{2}$$

1 e 2 hanno segno discorde, ovvero uno è positivo e l'altro negativo

Supponiamo, per fissare le idee, che

$$1 < 0$$

In tal caso una radice cade in

$$[a, m_0]$$

e quindi si pone

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = m_0 = \dfrac{a+b}{2} = a + \dfrac{b-a}{2^1} \quad (P_1) \\ f(a_1)f(b_1) < 0 \end{cases}$$

Adesso $m_1 := \dfrac{a_1+b_1}{2}$ e mi chiedo

$f(m_1) = 0$? Se sì, mi fermo, altrimenti

$[f(m_1)]^2 > 0$ e quindi

$0 > f(a_1)f(b_1) \Rightarrow 0 > [f(a_1)f(m_1)]\,[f(m_1)f(b_2)]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ 1 $\qquad\qquad\qquad$ 2

1 e 2 hanno segno discorde ...

Arriviamo, dopo n passi a

$$\begin{cases} a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n < b_n \le \dots \le b_2 \le b_1 \le b_0 \\ b_n = a_n + \dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = a_n + \dfrac{b-a}{2^n} \quad (P_n) \\ f(a_n)f(b_n) < 0 \end{cases}$$

Per passare a (P_{n+1}) si considera

$$m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$$

Se $f(m_n)=0$ allora ho finito, mentre se $\neq 0$ si ha $[f(m_n)]^2>0$ da cui si deduce

$$0 > \underbrace{[f(a_n)\, f(m_n)]}_{1} \underbrace{[f(m_n)\, f(b_n)]}_{2}$$

almeno uno dei due fattori è negativo, sia $2<0$ allora poniamo $a_{n+1}=m_n$ $b_{n+1}=b_n$

e troviamo

$$\begin{cases} a_0 \leq \dots \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_0 \\ b_{n+1} = a_n + \dfrac{b_n - a_n}{2} = a_n + \dfrac{b - a}{2^{n+1}} \\ f(a_{n+1})\, f(b_{n+1}) < 0 \end{cases} \quad (P_{n+1})$$

a_n monotona crescente, inoltre è limitata

$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_a$

b_n " decrescente, è limitata

$\Rightarrow b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_b$

Dunque $a_n \to \ell_a$ e $b_n \to \ell_b$

Inoltre $b_n = \left[a_n + \frac{b-a}{2^n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_a + 0$

$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_b \Rightarrow \boxed{\ell_a = \ell_b = z}$

Infine

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) = [f(z)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

$\boxed{\mathcal{R}.\mathcal{P}}$