Serie Numeriche - lez 1

Titolo nota 20/11/2010

$$e^{x} = \frac{1}{e^{-x}} \qquad e^{x} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$e^{-x} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$e^{x}\cdot e^{-x} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}}$$

$$e^{-x^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n} \in \mathbb{R}$$

Se una successione ha limite allora è limitata

dunque $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n}$ è limitata

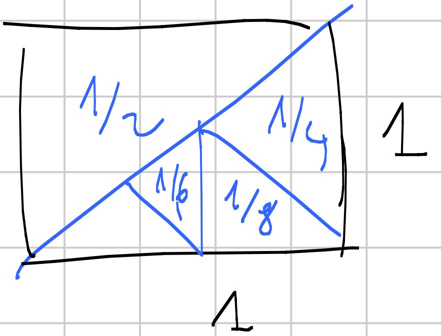
dunque $\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}$ " " (è una estratta)

dunque $\sqrt[n]{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow 1$

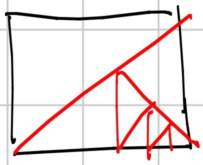
$$e^{x}\cdot e^{y} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{x\cdot y}{n^2}\right)^{n^2} = e^{x+y}$$

non lo dimostro

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=1$$



Confutazione di Zenone



Data una successione di n.ri reali

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

Ci si può trovare a risolvere il pb.

$$a_0+a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$$

Se ho 5 numeri, in quanti modi posso permutarli?

5!

Se ho ∞ n.ri, in quanti ...?

∞?

Per esempio, data $\sum(-1)^n = 1-1+1-1+1-1 \dots$

$0 \quad 1 \quad 0$

Si possono sommare $1 \longrightarrow 1-1=0 \longrightarrow 0+1=1 \longrightarrow 1-1=0 \dots$

ma si possono riordinare

Esempio

$$\sum_n (-1)^n = 1-1+1-1+1-1 \dots$$

$$= (1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+\dots = +\infty$$

$$= (1-1-1)+(1-1-1)+(1-1-1)+\dots = -\infty$$

Il pb. è che l'associativa su ∞ termini non vale, Def (Serie)

Data $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, diciamo "serie di termine generale a_n"

e la indichiamo con $\boxed{\sum_n a_n}$ simbolo che indica la serie

la successione delle sue somme parziali $\{S_n\}_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n$

a_n = termini della serie

Se esiste $\lim_n S_n$, questo si dice "somma" della serie

e si indica con $\underline{\sum_{k=0}^{\infty} a_n} = \underline{\lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k} = S$

- Serie convergente se $\exists \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$
- serie divergente posit. (negat.) se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \; (=-\infty)$
- " indeterminata se $\nexists \lim_n S_n$

Oss data $\{a_n\} \rightsquigarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

data $\{S_n\} \rightsquigarrow a_n = S_n - S_{n-1}$

Tutto quanto s'è detto x le successioni si

può usare nelle serie

Esempi

① $\sum_n 1 \qquad S_n = \sum_{n=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ serie e/o divergente

② $\sum_n (-1)^n \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \not\longrightarrow$ Serie non convergente ("indeterminata")

③ $\sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ Serie di Mengoli

Si osserva che $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ da cui

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$ dunque

$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$ da cui segue

che la serie è convergente

N.B. $(S_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}) \longrightarrow (a_n \longrightarrow 0)$

Serie geometrica di ragione q

$$\sum_n q^n = \{S_n\}_n = \left\{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right\}_n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$$

Ricordando che $|q|^n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & |q|>1 \\ 0 & |q|<1 \end{cases}$ si ha

$$\lim_n S_n = \begin{cases} +\infty, \text{ se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} \text{ se } |q|<1 \\ \nexists \text{ se } q \leq -1 \end{cases}$$

$0,\overline{9} = 0,99999 \dots 9 \dots < 1$?? NO

$$0,999\dots9\dots = 9\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + 9\cdot 10^{-3} + \dots + 9\cdot 10^{-n} + \dots$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots\right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad \left|\frac{1}{10}\right| < 1$$

$$= 9/10 \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9} = 1$$

Teorema Ogni numero periodico è razionale

es $3,\overline{18} = 3 + 18 \cdot 10^{-2} + 18 \cdot 10^{-4} + 18 \cdot 10^{-6} + \dots$

$$= 3 + \frac{18}{100} + \frac{18}{(100)^2} + \frac{18}{(100)^3} + \dots$$

$$= 3 + \frac{18}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right)$$

$$= 3 + \frac{18}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^n$$

$$= 3 + \frac{18}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = 3 + \frac{18}{\cancel{10^2}} \cdot \frac{\cancel{10^2}}{99}$$

$$\boxed{\text{Serie armonica generalizzata}}$$

$$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \underline{\text{se}} \ \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty \ \underline{\text{se}} \ \alpha \leq 1 \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (Condizione necessaria di convergenza)

$\{a_n\}_n$ succ. reale. Se $\sum_n a_n$ converge allora $a_n \to 0$

<u>dim</u>

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \boxed{Hp} \ \exists \lim_{n \to +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad \forall n$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1}$$

$$= l - l = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \qquad \blacksquare$$

IMPORTANTE OSS. non vale il viceversa

ovvero $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; \sum_n a_n$ converge

Esempio $\sum_n \frac{1}{n}$ non converge, ma $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \sum_n \frac{1}{n}$ non converge

$\Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_n$ non è di Cauchy

Ricordo che $\{S_n\}_n$ converge $\underline{\text{sse}}$ $\{S_n\}_n$ è di Cauchy

$\underline{\text{sse}}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \; \forall n, m > \bar{n} \quad |S_n - S_m| < \varepsilon$

$\underline{\text{sse}}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \; \forall n > \bar{n} \; \forall k \quad |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$

Adesso devo negare l'essere di Cauchy, ovvero

$\exists \bar{\varepsilon} : \forall \bar{n} \; \exists n > \bar{n} \; \exists k > 0 : \; |S_{n+k} - S_n| \geq \bar{\varepsilon}$

" " " " $\left|\sum_{i=0}^{n+k} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i\right| \geq \bar{\varepsilon}$

" " " " $|a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}| < \varepsilon$

" " " " $\left|\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \dots + \frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$

ma $\frac{1}{n+k} = \min_{1 \le i \le k} \left\{ \frac{1}{n+i} \right\}$, e quindi, preso $k=n$

$\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{k}{n+k} = \frac{1}{2}$ e questo prova che

$\exists \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \; : \; \forall \bar{n} \;\; \exists n > \bar{n} \;\; \exists k = n \; : \; |S_{n+k} - S_n| \geq \frac{1}{2}$

dunque <u>non</u> vale il criterio di Cauchy

dunque $\sum_n 1/n$ <u>non</u> converge $\blacksquare$

Abbiamo provato che $\sum_n 1/n$ non converge

Teorema (Criterio di Cauchy)

Sia data $\sum_n a_n$ serie numerica, allora

1) $\sum_n a_n$ converge

sse

2) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \ \forall k>0 \quad |S_{n+k}-S_n| = |a_{n+k}+\dots+a_n| < \varepsilon$

N.B. È stato dimostrato: infatti,

$\{S_n\}$ è convergente sse $\{S_n\}_n$ è di Cauchy

Serie a termini non negativi

$\sum_n a_n, \; a_n \geq 0$

$\{a_n\}_n$ è t.c. $a_n \geq 0 \;\; \forall n$

In tal caso si ha che $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è $\nearrow$

infatti

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$$

$a_1 \geq 0$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k = \sum_{k=0}^{0} a_k + a_1 = S_0 + a_1 \geq S_0$$

$(a_2 \geq 0)$

$$S_2 = \dots = S_1 + a_2 \geq S_1$$

$$S_n = \dots = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{n+1} = \dots = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

S_n è monotona crescente

Allora $\lim_{n \to +\infty} S_n = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

Oss $\sum_n a_n$ è a termini non negativi allora **non può** essere indeterminata

$\Rightarrow \sum_n a_n$ può essere $\begin{cases} \to \text{convergente} \\ \to \text{divergente a } +\infty \end{cases}$

ma non è MAI indeterminata

Teorema (Criterio del confronto)

Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali non negativi tali che

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

① $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

② $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

dim

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$A_n = A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \underset{\uparrow \text{ x ipotesi}}{\leq} A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = A_{n_0} + (B_n - B_{n_0})$$

ed ora

$\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow B_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow A_n \to m \Rightarrow \sum_n a_n$ converge

$\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow A_n \to +\infty \Rightarrow B_n \to +\infty \Rightarrow \sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{Esercizio}}$ $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ diverge $\forall \alpha \leq 1$

<u>dim</u>

$\alpha = 1$: si è provato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$

$\alpha < 1$ osservo che $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha > \frac{1}{n} = b_n$

ma $\sum_n b_n = +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = \sum_n \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

$\blacksquare$

Teorema (Criterio confronto asintotico)

$\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}$ succ. di numeri Reali non negativi $(b_n > 0)$

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$

allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere

dim

Hip $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$

essendo x Hip. $l > 0$, prendo $\varepsilon = l/2$

$\varepsilon = l/2 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l$

$\varepsilon = l/2 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad \frac{l}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2} l \cdot b_n$

$\sum_n b_n$ converge & $a_n < \frac{3}{2} l \, b_n$

$\Rightarrow \frac{3}{2} l \cdot \sum_n a_n$ converge

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

Viceversa $\sum_n a_n$ converge e $\frac{l}{2} b_n \leq a_n$

$\Rightarrow \frac{l}{2} \sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n b_n$ converge $\square$

$\boxed{\text{Esercizio}}$ $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$

dim

$$\sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)} < +\infty \quad \left(\overset{\text{ricordo}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1} \right)$$

ma $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1/n^2}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \lim_n \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2} = 1 \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow$ per il criterio confronto asintotico

$\sum_n 1/n^2$ converge

Inoltre $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall n \geq 1$ $\forall \alpha > 2$

Per il Teorema del confronto, essendo $\sum_n 1/n^2 < +\infty$

si ha che anche $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha < +\infty$ $\forall \alpha > 2$ $\blacksquare$

Oss $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ $1 < \alpha < 2$: per discutere questi casi si fa uso del criterio dell'integrale improprio

$\boxed{\text{Esercizio}}$ Studiare la convergenza di

$\sum_n a_n$, dove $a_n = \left(\text{sen}\,\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \left(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right)$

dim.

$$a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \left(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sim \frac{1}{n^{\alpha + 1/2}} \quad \text{quando } \alpha \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\text{sen}\,\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{\left(1/n\right)^{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/n}} = \frac{1}{2}$$

quando $\alpha \geq 0$

$$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha + 1/2} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1/2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1/2 \end{cases}$$

Quando $\alpha < 0$, $a_n = \left(\text{sen}\,1/n\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

e dunque

$$a_n \sim \left(1/n\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha + 1/2}$$

infatti $\lim_n \frac{a_n}{(1/n)^{\alpha+1/2}} = 1$

Quindi

$\sum_n a_n$, quando $\alpha < 0$, si comporta come

$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ che è divergente,

in quanto $\alpha + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

e quindi $\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

ed essendo $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$

ne segue $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} = +\infty$

$\forall \alpha < 0$ $\blacksquare$

Teorema (Criterio della radice n-esima)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale, $a_n \geq 0$, t.c.

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty[$$

1) $0 \leq L < 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

2) $1 < L \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$

dim

2) $L = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \lim_n a_n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$ (è violata la condizione necessaria)

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{L+1}{2} - L \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} < \frac{L+1}{2} < 1$

$\quad '' \quad '' \quad '' \quad a_n < \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$

ma $\sum_n \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$ converge $\Rightarrow$ per il

Teorema del confronto $\sum_n a_n < +\infty$ ▨

Esempio Studiare la convergenza di

$$\sum_n n^3 \cdot q^n$$

utilizzando il criterio della radice al variare del parametro $q \in \mathbb{R}$.

dim

$$\sqrt[n]{n^3 |q|^n} = \sqrt[n]{n^3} \cdot |q| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \cdot |q|$$

la serie $\sum_n n^3 q^n$ converge se $|q|<1$

Quando $q=1$, trovo $\sum_n n^3$ che diverge

Esercizio

Studiare la convergenza di $\sum_n \frac{q^n}{n^3}$

dim

$$\sqrt[n]{\frac{|q|^n}{n^3}} = \frac{|q|}{\sqrt[n]{n^3}} \longrightarrow |q|$$

se $|q|<1$ allora la serie converge

$q=1$ la serie diventa $\sum_n 1/n^3$ che è convergente

$q=-1$ " " " $\sum_n (-1)^n/n^3$ " " "

$\uparrow$ x il criterio Leibniz

Serie a termini di segno qualunque

Data $\{a\}_n$ senza segno ben definito, è sempre vero

il criterio di Cauchy: posto $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Teorema

la serie $\sum_n a_n$ di termine generale a_n converge

se

$\{S_n\}_n$ è convergente

se

$\{S_n\}_n$ è di Cauchy

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad |S_{n+k} - S_n| = |a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1}| < \varepsilon$

Però non serve molto: verificare che la successione $\{S_n\}$ è

di Cauchy non è cosa molto facile!

Risulta utile il concetto di "convergenza assoluta"

Def Data $\sum_n a_n$, diciamo che questa serie

converge assolutamente

se $\sum_n |a_n|$ converge

Oss: ① $\sum_n |a_n|$ è una serie a termini positivi,

per la quale valgono tutti i criteri visti

prima.

② Esistono serie che convergono semplicemente

ma NON convergono assolutamente

Esempio $\sum_n (-1)^n \cdot 1/n$

Infatti $\sum_n \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_n 1/n$ NON CONVERGE

$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ CONVERGE x criterio Leibniz

(vedi le serie a termini segno alterno !!!)

Il motivo per cui è stata introdotta la def. di

assoluta convergenza è il seguente

Teorema (assoluta convergenza $\Rightarrow$ semplice convergenza)

Sia data $\sum_n a_n$ serie di termine generale a_n

Se $\underbrace{\sum_n |a_n| \text{ converge}}_{\sum_n a_n \text{ converge assolutamente}}$ allora $\sum_n a_n$ converge

dim

Dette $A_N = \sum_{k=0}^{N} |a_k|$ $\qquad S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$

Hp $A_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} A \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ Criterio Cauchy

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{m}\ \forall N > \bar{m}\ \forall k \quad |A_{N+k} - A_N| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{m}\ \forall N > \bar{m}\ \forall k \quad |a_{N+k}| + |a_{N+k-1}| + \dots + |a_{N+1}| < \varepsilon$

Ts $S_N \longrightarrow S \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ criterio Cauchy

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{m}\ \forall N > \bar{m}\ \forall k \quad |S_{N+k} - S_N| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{m}\ \forall N > \bar{m}\ \forall k \quad |a_{N+k} + a_{N+k-1} + \dots + a_{N+1}| < \varepsilon$

ma ricordando che

$$\begin{gathered} |a_{N+k} + a_{N+k-1} + \dots + a_{N+2} + a_{N+1}| \\ \wedge\!\backslash \\ |a_{N+k}| + |a_{N+k-1}| + \dots + |a_{N+1}| \end{gathered}$$

Esempio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

dim

$(\alpha > 1 \ , \ 0 < \alpha \leq 1, \quad \alpha \leq 0)$

$\operatorname{sen}(n)$ non ha segno ben definito

$\operatorname{sen} 1 > 0 \qquad \operatorname{sen} 2 > 0 \qquad \operatorname{sen} 3 > 0 \qquad \operatorname{sen} 4 < 0$

Studiamo la convergenza assoluta

Considero la serie $\sum_n \left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^\alpha} \right|$

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

da cui segue che, essendo $\sum_n 1/n^\alpha$

convergente quando $\alpha > 1$

$\Rightarrow \sum_n \left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^\alpha} \right|$ converge $\forall \alpha > 1$

$\Rightarrow \sum_n \frac{\operatorname{sen} n}{n^\alpha}$ " "

Oss Data $\sum_n a_n$ con $a_n \geq 0$

$\sum_n a_n$ converge sse $\sum_n |a_n|$ converge

Serie a termini di segno alterno

Diamo un criterio di convergenza per le serie del tipo

$$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$$

dove $\{a_n\}_n$ è una successione reale che soddisfa opportune ipotesi

Teorema (criterio Leibniz)

Sia data la serie $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$

Se
$$\begin{cases} ① \ a_n \geq 0 \quad \forall n \\ ② \ a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \\ ③ \ a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$
allora $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge.

Oss: ① Questo teorema si può estendere a

"$\sum_n a_n b_n$ ① $a_n \geq 0$ ② $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$ ③ $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

④ $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_n a_n b_n$ converge"

② Con questo Teorema si prova che

$$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

- converge assolutamente (e quindi converge) $\forall \alpha > 1$ (perché?)
- converge (ma non assolutamente) $\forall \alpha \in]0,1]$: (perché?)
- non converge quando $\alpha \leq 0$ (perché)

<u>dim.</u> (del criterio di Leibniz)

Ponendo $S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot a_k$ $\quad \cancel{\exists}$ $\exists \lim_{N \to +\infty} S_N = l \in \mathbb{R}$

Sapendo che $\{S_N\}_N = \{S_{2N}\}_N \cup \{S_{2N+1}\}_N$

<u>$\cancel{\exists}$ equiv</u> $\quad \lim_{N \to +\infty} S_{2N} = \lim_{N \to +\infty} S_{2N+1} = l \in \mathbb{R}$

Studiamo S_{2N}

① S_{2N} è monotona

② S_{2N} è limitata

③ S_{2N+1} è monotona

④ S_{2N+1} è limitata

5 $\left| S_{2N+1} - S_{2N} \right| = \left| a_{2N+1} \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{}$

Oss la serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $= a_n$ converge semplic.

Per un Teorema di Riemann, esiste un riordinamento dei suoi termini t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = -\infty$$