Titolo nota 14/11/2010

$$\Rightarrow \{a_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n \cup \{a_{h_n}\} \qquad \left(\mathbb{N} = k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N})\right)$$

$$a_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

$$a_{h_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

$$\Longrightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

Esempio

$\{a_n\}_n \qquad a_n = \begin{cases} \underbrace{1 - \dfrac{1}{n}}_{= b_n} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \underbrace{1 + \dfrac{1}{n+1}}_{= c_n} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

$\{b_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_n = \left\{1 - \dfrac{1}{2n+1}\right\}_n \qquad k_n = 2n+1$

$n \xmapsto{k} 2n+1$

$\{c_n\}_n = \{a_{2n}\}_n = \left\{1 + \dfrac{1}{2n+1}\right\}_n \qquad h_n = 2n$

$n \longmapsto 2n$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1^- = \lim_n b_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = 1^+ = \lim_n c_n$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$

$n \longrightarrow 2n+1$

$$\{b_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\}_n$$

$$\{c_n\}_n = \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \frac{1}{2n}\right\}_n \quad h_2 : n \longrightarrow 2n$$

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 1$$

Teorema (Permanenza segno)

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l < 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad a_n < 0$$

Teorema (Confronto)

$$a_n \leq b_n \ \forall n \implies \lim_n a_n \leq \lim_n b_n$$

Teorema (dei due carabinieri)

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \quad \Longrightarrow \quad b_n \to l$

$a_n \to l \quad c_n \to l$

Teorema (somma, prodotto, quoziente)

$a_n \to l \quad \Longrightarrow \quad a_n + b_n \to l + m$

$b_n \to m$

$a_n \cdot b_n \to l \cdot m$

$a_n / b_n \to l / m$

le scritture devono avere senso

Teorema (limitata x infinitesima = infinitesima)

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}$ due successioni reali t.c.

1) $\exists M > 0$ t.c. $|b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ — Limitatezza

2) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ — Infinitesima

allora $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = 0$

dim

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \overset{\forall n}{\leq} \underbrace{|a_n| \cdot M}_{g_n}$$

h_n

$h_n \equiv 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad g_n = |a_n| \cdot M \xrightarrow[n \to +\infty]{} M \cdot \lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$

$\Longrightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

Os. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Leftarrow$

Os $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0 \Rightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$

$$\big||a_n|-|\ell|\big| \le \underbrace{|a_n-\ell|}_{\downarrow\, 0}$$

Os $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Controesempio

$a_n = (-1)^n \qquad |a_n| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

però $(-1)^n \not\longrightarrow$

perchè $\exists \{a_{k_n}\}_n = \{-1\}_n \longrightarrow -1$

$\exists \{a_{k_n}\} = \{1\}_n \longrightarrow 1 \quad \neq$

Teorema di Bolzano Weierstrass

$\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\{a_n\}_n$ è limitata

allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ convergente a $l \in \mathbb{R}$

→ ∃ sottosuccessione monotona

→ Una successione monotona ha limite

→ essendo limitata, la sottosuccessione deve aver limite finito e dunque converge

Si era provato il semplice Teorema

" Se $\# S < +\infty$ e $S \subseteq \mathbb{R}$

allora $\exists \max S$ e $\min S$

Vale però un risultato più forte

Teorema Sia dato $S \subseteq \mathbb{R}$; sono tra loro equivalenti le seguenti affermazioni

(i) S è finito

$\Downarrow$ è stata fatta

(ii) $\forall E \subseteq S$, esistono $\min E$ e $\max E$

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) è il risultato noto in precedenza

(ii) $\Rightarrow$ (i) x assurdo neghiamo la Tesi, ovvero

$\boxed{\overline{\nexists\ \# S < +\infty}}$ $\quad \# S = +\infty$

Costruiremo $E \subseteq S'$ t.c. $\nexists \max E$, ovvero

una contraddizione, Osserviamo che $S \subseteq S'$, e

dunque $\exists$ min S' e max S

$\to x_0 = \min S'$ $\qquad$ $(S' \setminus \{x_0\}) \subseteq S$

$\to x_1 = \min (S' \setminus \{x_0\})$ $\qquad$ $(S' \setminus \{x_0, x_1\}) \subseteq S'$

$x_2 = \min (S' \setminus \{x_0, x_1\})$ etc (N.B. $x_{n+1} > x_n$)

....

$x_{n+1} = \min (S' \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

$\to E = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq S'$, con $x_n < x_{n+1}$

ma

$\nexists \max E$

(se $\exists\ \xi = \max E$ allora $\xi = x_{\bar{n}}$ $\quad \xi \in E$

ma $x_{\bar{n}} < x_{\bar{n}+1} \in E$ allora ξ non è max)

■

Oss Se S è infinito allora

esiste un sottoinsieme senza max o min

Una interessante conseguenza del precedente teorema è che

"Se S ha infiniti elementi allora $\exists$ $E \subseteq S$ t.c. $\nexists \min E$ o $\max E$"

(Il thm dice che "S finito $\Rightarrow \forall E \subseteq S$ $\exists \min E$, $\max E$")

Vale inoltre il seguente risultato

Teorema $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\# E = +\infty$ e sia $\lambda = \sup E$, $\lambda \notin E$

Allora λ è punto di accumulazione per E

dim

$\lambda = \sup E$ supponiamo che $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a \leq \lambda \quad \forall a \in E \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in E : \lambda - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$$

La mia Tesi è $\forall U \in \mathcal{U}_\lambda \quad U \cap (E \setminus \lambda) \neq \emptyset$

ma questo è immediato poiché, preso $U =]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[$,

dalla def di $\lambda = \sup E$ si trova che

$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists a_\varepsilon \in E : \lambda - \varepsilon < a_\varepsilon < \lambda$

e quindi abbiamo che esiste $a_\varepsilon \in]\lambda-\varepsilon, \lambda[\cap U$

e dunque $\exists a_\varepsilon \in]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[\cap (E \setminus \lambda)$

e dunque $]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[\cap (E \setminus \lambda) \neq \emptyset$ ▨

Corollario

Dato $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\# E = +\infty$, $\lambda = \sup E$ ma $\nexists \max E$

Allora $\exists \{x_n\}_n \subseteq E \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda = \sup E$

dim

Infatti si prende $x_0 \in E$ qualsiasi.

Sfruttando la def. di estremo superiore, si ha che

fissato $x_0 \in E$, $\exists \bar{a} \in E : x_0 < \bar{a} < \lambda$

si prende $x_1 = \bar{a}$

fissato $x_1 \in E$, $\exists \bar{a} \in E$: $x_1 < \bar{a} < \lambda$

si prende $x_2 = \bar{a}$

------

fissato $x_n \in E$, $\exists \bar{a} \in E$ $x_n < \bar{a} < \lambda$

si prende $x_{n+1} = \bar{a}$

$\{x_n\}_n \subseteq E$ & $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lambda$ per costruzione

///

Le osservazioni che seguono non sono essenziali, ma possono servire per una riflessione

Oss $\lambda = \max E \not\Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subset E$ $x_n \to \lambda$

infatti: $E = \{ 1/n : n \geq 1 \}$ $\max E = 1$ ma ...

Oss Ma anche un max può essere p.d.a.

infatti $E = \{ 1 - 1/n : n \geq 1 \} \cup \{1\}$

$1 = \max E$ ed $\exists \{x_n\} \nearrow 1$ $\{x_n\} \subseteq E$

Def Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, questa si dice

- "monotona strettamente crescente" se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$
- "monotona debolmente crescente" se $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$

e analoghe definizioni per le decrescenti

Esempio ① $\{a_n\}_n = \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\bar{=}\nearrow$

② $\{a_n\}_n$ dove $a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ n-1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ $\nearrow$ $=$

$0, 0, 2, 2, 3, 3, 4, 4$

Oss le successioni monotone **non oscillano** (ovvio!) e quindi presentano interessanti prospettive nel caso dei limiti

$a_n = n^2$ $\quad a_n \nearrow$ $\quad a_n \longrightarrow +\infty = \sup\{a_n\}$

$a_n = \arctan n$ $\quad a_n \nearrow$ $\quad a_n \longrightarrow \pi/2 = \sup\{a_n\}$

__Teorema__ (limiti successioni monotone)

Sia data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ monotone crescente

allora 1) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$

2) $l = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

__Oss__ Questo risultato è FONDAMENTALE mette in relazione l'estremo superiore di un insieme di numeri reali (che $\exists$ sempre) con il limite di una successione (che non è detto esiste)

__Oss__ Naturalmente il Teorema vale per successioni monotone decrescenti, in tal caso il limite esiste e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$$

Vediamo il caso $\boxed{\lambda = +\infty}$

- $\lambda = +\infty = \sup a_n \iff \forall M \ \exists a_n : a_n > M \implies$
- x hip $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n$

$\implies \forall M > 0 \ \exists \bar{n} \ : \forall n > \bar{n} \quad M < a_{\bar{n}} \leq a_n$

$\implies a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty = \sup_n a_n$

Vediamo $\lambda \in \mathbb{R}$

Def. di sup $\longrightarrow \begin{cases} a_n \leq \lambda \quad \forall n & (1) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \lambda - \varepsilon < a_{\bar{n}} & (2) \end{cases}$

monotonia $\nearrow \longrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \quad (3)$

$\implies \begin{cases} a_n \leq \lambda \quad \forall n \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ : \forall n > \bar{n} \quad \lambda - \varepsilon < a_{\bar{n}} \overset{(3)}{\leq} a_n \end{cases}$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \lambda - \varepsilon < a_n \overset{(1)}{\leq} \lambda$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon$

$\blacksquare$

Quello che segue può sorprendere

<u>Teorema</u> (esistenza di un'estratta monotona)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale.

Allora $\exists \{a_{k_n}\}_n$ successione estratta monotona

<u>dim.</u>

Nel caso in cui $S=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

è composto da un nro finito di valori

allora per il Teorema della

piccionaia uno di questi valori,

diciamo sia w, verrà assunto ∞

volte e quindi posto

$$a_{k_n} = w \xrightarrow[n\to+\infty]{} w$$

abbiamo trovato la sottosucc. convergente

Altrimenti si ha che l'insieme

$$S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ha cardinalità ∞, ovvero $\# S = +\infty$

$\Rightarrow \quad \exists E \subseteq S$ t.c. $\nexists \min E$ o $\nexists \max E$

Supponiamo (e non è restrittivo) che detto $\lambda = \sup E$, $\nexists \max E$ (ovvero $\lambda \notin E$)

Si prende $\lambda = \sup E$

$\exists \{a_{k_n}\}_n$ succ. estratta, $a_{k_n} \to \lambda$, $a_{k_n} \nearrow$

Fissiamo $k_0 = 0$, ovvero $a_{k_0} = a_0$

$\lambda = \sup E$, e λ p.to di accumulazione per E

fissato a_{k_0} $\exists \bar{a} \in E$; $a_{k_0} < \bar{a} < \lambda$

"

$$\exists n : \begin{cases} a_n \in E \\ a_{k_0} < a_n < \lambda \end{cases}$$

$$\exists n ; \begin{cases} a_n \in E \\ k_0 < n \\ a_{k_0} < a_n < \lambda \end{cases}$$

Voglio $k_n \geq n$

$$\exists n ; \begin{cases} a_n \in E \\ k_0 < n \\ a_{k_0} < a_n < \lambda \\ \lambda - 1 < a_n < \lambda \end{cases}$$

voglio $a_{k_n} \uparrow$

voglio $a_{k_n} \to \lambda$

posto $A_{k_1} = \{n : a_n \in E, k_0 < n, a_{k_0} < a_n, \lambda - 1 < a_n < \lambda\}$

si ha $A_{k_1} \neq \emptyset$

poniamo $k_1 = \min A_{k_1} (> k_0)$

Nota: si riflette sul fatto che $A_{k_1} \neq \emptyset$ per definizione di estremo superiore (essendo λ p.d. accumulazione, ho ∞ punti di E "vicini" a λ).

preso a_{k_1}, $\exists n$: $\begin{cases} a_n \in E \\ a_{k_1} < a_n < \lambda \end{cases}$

" , " : $\begin{cases} a_n \in E \\ k_1 < n \\ a_{k_1} < a_n < \lambda \end{cases}$

" , " : $\begin{cases} a_n \in E \\ k_1 < n \\ a_{k_1} < a_n < \lambda \\ \lambda - \frac{1}{2} < a_n < \lambda \end{cases}$

poniamo

$$A_{k_2} = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \in E,\ k_1 < n,\ a_{k_1} < a_n,\ \lambda - \frac{1}{2} < a_n < \lambda \}$$

$\emptyset \neq A_{k_2} \subseteq \mathbb{N}$ $\qquad k_2 = \min A_{k_2} \ (> k_1)$

- - - - .

Per Hip induttiva supponiamo di aver definito $k_h = \min A_{k_h}$

preso a_{k_h}, $\exists n$: $\begin{cases} a_n \in E \\ k_h < n \\ a_{k_h} < a_n < \lambda \\ \lambda - \frac{1}{h+1} < a_n < \lambda \end{cases}$

$$\emptyset \neq A_{k_{h+1}} = \{ n : a_n \in E,\ k_h < n,\ a_{k_h} < a_n < \lambda,\ \lambda - \frac{1}{h+1} < a_n < \lambda \}$$

e $A_{k_{h+1}} \subseteq \mathbb{N}$ dunque

$$\exists\ k_{h+1} = \min A_{k_h}$$

Risulta in tal modo definita una

- sottosuccessione $\{a_{k_h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ di $\{a_n\}$ (infatti $k_h > h$ $\forall h$ per costruzione)
- $a_{k_h} \nearrow$ per costruzione
- $a_{k_h} \longrightarrow \lambda$ " " in quanto

$$\underbrace{\lambda - \frac{1}{h+1}}_{\downarrow h \to +\infty \atop \lambda} < a_{k_h} < \underbrace{\lambda}_{\downarrow h \to +\infty \atop \lambda}$$

e quindi si ha la tesi per il Teorema dei due Carabinieri $\blacksquare$

Oss Data una successione $\{a_n\}_n$, questa può avere più di un punto di accumulazione

Esercizio ← facoltativo!!! $\{a_n\}_n$ successione, sia P un suo punto di accumulazione. Allora $\exists \{a_{k_n}\}$ sottosuccessione t.c. $a_{k_n} \longrightarrow P$

dim

Se $P = \sup\{a_n\}$ o $P = \inf\{a_n\}$, abbiamo visto come procedere nel teorema precedente.

Nel caso in cui $\inf a_n < P < \sup a_n$, si possono considerare

$$S_P = \{a_n : a_n \leq P\}$$

$$D_P = \{a_n : P \leq a_n\}$$

Visto che P è p.d.a. per $\{a_n\}_n$, risulta p.d.a. per S_P o D_P (almeno per uno dei due!)

essendo $\{a_n\} = D_p \cup S_p$

Quindi si avrà

$$P = \sup S_p \quad o \quad P = \inf D_p$$

e si conclude applicando il risultato precedente.

<u>Teorema</u> (Bolzano Weierstrass)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale limitata, allora esiste $\{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione convergente

<u>dim</u>

<u>Passo 1</u> data $\{a_n\}_n \Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ sottosuccessione monotona

<u>Passo 2</u> $\{a_{k_n}\}$ è monotona $\Rightarrow a_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

Passo 3 essendo $|a_n| \leq M \ \forall n$

$\Rightarrow |a_{k_n}| \leq M \ \forall n \Rightarrow \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a_{k_n}$ è convergente $\blacksquare$

Oss Più in generale, si prova che dato un qualsiasi sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}$ tale che $\# E = +\infty$ allora E ha almeno un punto di accumulazione

(perché?)

Def (Successione di Cauchy)

Data $\{a_n\}_n$ successione reale, diciamo che "$\{a_n\}_n$ è di Cauchy" se

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon : \forall n, m > n_\varepsilon \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Oss fissato per es. $\varepsilon=1$, $\exists \bar{n}_1$ t.c.

$$\forall n, m > n_1 \qquad |a_n - a_m| < 1$$

ovvero

$$\boxed{\varepsilon=1 \quad \forall n > n_1 \qquad a_{\bar{m}} - 1 < a_n < a_{\bar{m}} + 1 \qquad \bar{m} = n_1+1}$$

e questo mi dice che $\{a_n\}_n$ è limitata da n_1 in poi, ovvero è limitata

N.B. ① Non è la def di convergenza, ma dice semplicemente che la successione si "infittisce".

② Sembra che non sia permesso ad $\{a_n\}$ di tendere a $+\infty$ (perché?)

③ Che legami ci sono tra l'essere di Cauchy e l'essere convergente?

(Convergente ⇒ Cauchy)

Teorema Dato $\{a_n\}_n$ successione reale

$\{a_n\}_n$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}_n$ di Cauchy

dim

Hip $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ ovvero

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \qquad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

Th $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon : \forall n,m>n_\varepsilon \qquad -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$

ma
$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m|$$
$$\leq |a_n - l| + |a_m - l|$$

quando
$n > n_\varepsilon$
$m > n_\varepsilon$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n,m>n_\varepsilon \qquad |a_n - a_m| < 2\varepsilon$$

oppure

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \qquad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ \forall m>n_\varepsilon \quad l-\varepsilon < a_m < l+\varepsilon \qquad -l-\varepsilon < -a_m < -l+\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n,m>n_\varepsilon \quad -2\varepsilon < a_n - a_m < 2\varepsilon$$

Ma in $\mathbb{R}$ vale il viceversa !!

<u>Teorema</u>

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale

Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\{a_n\}$ è convergente

<u>dim</u>

Si fa in tre passi.

<u>Passo n°1</u> $\{a_n\}_n$ di Cauchy $\Rightarrow \{a_n\}_n$ è limitata

Infatti, x hip. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0 \ \forall n, m > n_\varepsilon \quad -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \exists n_1 > 0 \ : \forall n, m > 0 \quad -1 < a_n - a_m < 1$

$\Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \exists n_1 > 0 \ : \exists \overline{m} = n_1 + 1 \ \forall n > n_1 \quad -1 < a_n - a_{\overline{m}} < 1$

$\Rightarrow \varepsilon = 1 \ \exists n_1 > 0 \quad \exists \overline{m} = n_1 + 1 \ \forall n > n_1$

$$a_{\overline{m}} - 1 < a_n < a_{\overline{m}} + 1$$

e dunque $\forall n \quad |a_n| \leq \max\{|a_{\overline{m}} - 1|, |a_{\overline{m}} + 1|, q\}$

dove $\quad q = \max\{|a_0|, |a_1|, ---, |a_{n_1}|\}$

Passo 2 $\{a_n\}_n$ limitata $\xRightarrow{B\text{-}W} \exists \{a_{k_n}\}_n$ convergente a ℓ

questo passo segue dal Teorema di Bolzano Weierstrass

Passo 3
$$\left.\begin{array}{l}\{a_n\}_n \text{ di Cauchy} \\ \exists \ \{a_{k_n}\}_n \text{ sottosuccessione convergente a } \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \{a_n\}_n \text{ converge a } \ell$$

$$\text{Hip}\begin{cases}\forall \varepsilon>0 \ \exists n_1>0 : \forall n, m > n_1 & |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{Cauchy} \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists n_2>0 \ \forall n > n_2 & |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon\end{cases}$$

$$\text{Ts} \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n > \bar{n} \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

ma $|a_n - \ell| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - \ell|$

$$\le \underbrace{|a_n - a_{k_n}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{k_n} - \ell|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

dunque, preso $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$

$$n > \bar{n} \geq n_1 \Rightarrow k_n \geq n > n_1 \quad \Rightarrow |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$$

$$n > \bar{n} \geq n_2 \Rightarrow k_n \geq n > n_2 \quad \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = n_1 \vee n_2 \ \forall n > \bar{n} \quad |a_n - \ell| < 2\varepsilon$$

$\blacksquare$

IMPORTANTE

$\{a_n\}_n$ di Cauchy $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}_n$ convergente

ma qui non c'è traccia di quale sia il limite ℓ a cui tende la successione

Oss Un modo per costruire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ è quello di considerare il seguente insieme

$$\{x : \exists \{q_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \, , \{q_n\}_n \text{ di Cauchy} \, , q_n \longrightarrow x\}$$

Questo insieme è Tutto $\mathbb{R}$!!!

$\rightarrow$ Si noti che $\{q_n\}_n = \{\frac{1}{2}\}_n \quad q_n \rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

e dunque Trovo Tutti i razionali

$\rightarrow$ Ad esempio q_n : $\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}\left(q_n + \frac{2}{q_n}\right) \end{cases}$

è una successione monotona

crescente $q_n \longrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$