Successioni Reali e loro limiti - lez 1

Titolo nota 14/11/2010

$f \in C^{n+1}([a,b])$ $\quad x_0 \in]a,b[$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$f(x)$ $\quad x = 0$

① $f(0)$ $\quad f(x) - f(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$f(x) = f(0) + o(1) \quad (x \to 0)$$

② $$\frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$$

t.c. $$\frac{f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + o(x) \quad (x \to 0)$$

(3)

$$\frac{f(x) - f(0) - f'(x)\cancel{x}}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{}$$

Algebra in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad +\infty + c = +\infty$ 🚩 $+\infty - c = +\infty$

$-\infty + c = -\infty$ 🚩 $-\infty + c = -\infty$

$f(x) = x \quad g(x) = 3 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \to +\infty} f + \lim_{x \to +\infty} g$

$= +\infty + 3 = +\infty$

$\forall c > 0$ 🚩 $c \cdot (+\infty) = +\infty \qquad c \cdot (-\infty) = -\infty$

$(-c) \cdot (+\infty) = -\infty \qquad (-c) \cdot (-\infty) = +\infty$

$f(x) = x \quad g(x) = \frac{x}{x+1} \qquad \lim_{x \to +\infty} f = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f \cdot g = 1 \cdot +\infty = +\infty$

🚩 $\frac{c}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{c}{-\infty} = 0^-$

$\forall c > 0$ 🚩 $\frac{+\infty}{c} = +\infty \qquad \frac{-\infty}{-c} = +\infty$

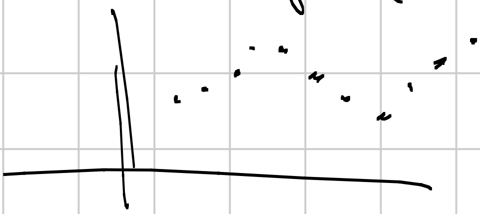
$\forall c > 0$ 🚩 $\frac{c}{0^+} = +\infty \qquad \frac{c}{0^-} = -\infty$

(Sono tanti "micro" teoremi)

Noi abbiamo esperienza solo dei n.ri razionali

Il computer lavora con n.ro finito di numeri

Il grafico del p.c.



Iniziamo con una definizione

Def Fissato $\bar{n} \in \mathbb{N}$, diciamo

"semiretta (di $\mathbb{N}$)"

l'insieme $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$

Oss S = semiretta di n = $\mathbb{N} \cap [\bar{n}, +\infty[$.

dove $[\bar{n}, +\infty[$ è una semiretta di $\mathbb{R}$.

Def. Dato S semiretta di $\mathbb{N}$, diciamo

"successione a valori reali"

una qualsiasi funzione $f : S \to \mathbb{R}$

Oss ① $f : S \to \mathbb{R}$ successione è una funzione

continua su S (perché?)

perché il dominio è unione di punti ISOLATI

② Usualmente si indicano le successioni con

$$\{a_n\}_{n\in S} = \{\underset{f(\bar{n})}{a_{\bar{n}}}, \underset{f(\bar{n}+1)}{a_{\bar{n}+1}}, \underset{f(\bar{n}+2)}{a_{\bar{n}+2}}, \dots, a_{\bar{n}+k}, \dots\}$$

ovvero

successione $\Longleftrightarrow$ insieme dei valori della successione

Esempi ① $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

è una successione

② $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione
$= \{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$

③ $\{a_n\}_{n\in S} = \left\{\frac{1}{n-3}\right\}_{n\geq 4}$ " " "

Sembra che a_n sia definita su $\mathbb{N}\setminus\{3\}$ ma $\mathbb{N}\setminus\{3\}$ non è una semiretta ma le successioni sono definite su semirette, quindi prendo $\{4, 5, 6 \dots\}$

④ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{P}}$ NON è una successione (perché ??)

devo scartare TUTTI i numeri naturali dispari, poiché $k=2n+1 \Longrightarrow 1+(-1)^k = 0$ e dunque a_{2n+1} non è definita. Ma allora ho ∞ "buchi" e quindi $\nexists$ semirette ove $1/\varphi$ posso definire la successione

Def. Data una successione $\{a_n\}_{n \in S}$ e data una applicazione $\boxed{k : S \to \mathbb{N} \text{ strettamente crescente}}$

è l'analogo della restrizione

diciamo "successione estratta" (o sottosuccessione) la composizione $\boxed{a \circ k} : S \to \mathbb{R}$

ovvero
$$\underset{\in S}{n} \to \underset{\in \mathbb{N}}{k(n)} \to \underset{\in \mathbb{R}}{a(k(n))}$$

e questa viene indicata usualmente con

$$\boxed{\{a_{k_n}\}_{n \in S}} \qquad (a(k(n)) \; !!)$$

Esempi

Data $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sono sottosuccessioni le seguenti

1) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\quad k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad k(n) = n^2$

$\{a_n\} = \{5n\} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$

$k(n) = n^2 \quad k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\{a_{k_n}\} = \{5n^2\}_n = \{0, 5, 20, 45, \dots\}$

2) $\{c_n\}_n = \{a_{7n-3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad k(n) = 7n-3$

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow$

$a_n = \log n \longrightarrow \{\log 1, \log 2, \log 3, \ldots\}$

$\{a_{7n+3}\}_n = \{\log(7n+3)\}_n = \{\log(10), \log(17), \log(24) \ldots\}$

Oss ① Nella sottosuccessione $k(n)\nearrow$ impone di scegliere facendo "crescere" l'indice
② Una sottosuccessione deve avere

∞ termini: infatti, una sottosuccessione deve essere una successione a sua volta.

3) $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad k(n) =$

dove $\lfloor x \rfloor = \max\{n\in\mathbb{N} : n \le x\} =$ parte intera di x

$\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2 \qquad \lfloor 0{,}9 \rfloor = 0 \qquad \lfloor 4{,}1 \rfloor = 4$

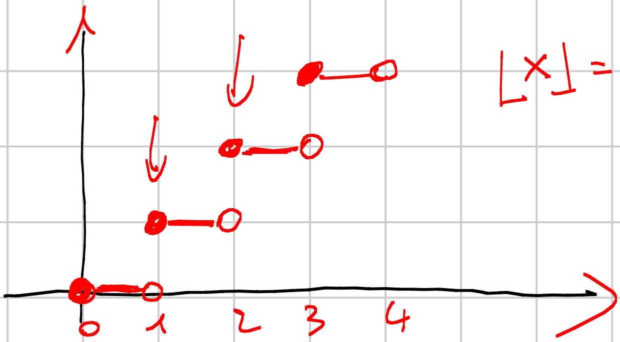
$\boxed{\to x < 0 \,???}$

$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ $\qquad \{a_n\} = \{0, 1, 2, 1, 4, 1, \ldots\}$

$\{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\} = \{a_0, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots\}$

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor \quad \nearrow ???$

$f(n)$ non è strettamente crescente $\Rightarrow \{a_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}\}_n$ non è sottosuccessione



Che la definizione di sottosuccessione sia ben data è conseguenza del seguente

Teorema Dato $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente allora $\boxed{f(n) \geq n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

dim

$f(0) = ?$, ma $f(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow f(0) \geq 0$ Base Indut.

Hp. induttiva $f(k) \geq k$

$\boxed{\text{Ts}}$ $f(k+1) \geq k+1$

Hp. indutt.

$f(k+1) \overset{f \nearrow}{>} f(k) \geq k \Rightarrow f(k+1) > k$

ma $f(k+1) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(k+1) \geq k+1$ ∎

Om $\{a_{k_n}\}$

$n=1 \longrightarrow k_1 \geq 1$

$n=2 \longrightarrow k_2 > k_1$ $\quad k$ strett. $\uparrow$

$k_2 \geq 2 \quad \forall n.$

Ricordando che $+\infty$ è p.d.a. per $\mathbb{N}$, ha senso la seguente

Om

NON HA SENSO $\lim_{n \to 100} a_n$

poiché 100 NON È P.D. Accumulaz per $\mathbb{N}$

Def (Limite di una successione)

Dato $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, diciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \underline{\text{se}}$$

$\forall U \in \mathcal{U}_l,\ \exists V \in \mathcal{U}_{+\infty} : \forall n \in V \cap \mathbb{N} \quad a_n \in U$

dominio

ovvero, essendo $V = [\bar{n}, +\infty[$ (potrebbe essere semiretta)

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{U}_l \ \exists \bar{n} \geq 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U}$$

Questa volta ho solo 3 casi

$l = +\infty \quad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n}_M \geq 0 : \forall n > \bar{n} \quad M < a_n$

$l \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \geq 0 : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$l = -\infty \quad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n}_M \geq 0 : \forall n > \bar{n} \quad a_n < M$

Esempi ① $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n \longrightarrow +\infty$

devo provare che

$$\forall M>0 \quad \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \qquad n^2 > M$$

come scegliere $\bar{n} = \bar{n}(M)$ $\qquad n^2 = M \qquad n=\sqrt{M} \in \mathbb{R}$

se prendo $\bar{n} = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$

infatti si ha che $n > \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$

$$n^2 > \left(\lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1\right)^2 = \lfloor \sqrt{M} \rfloor^2 + 2\lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$$

$$\geq \left(\sqrt{M}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{M}-1\right) + 1$$

$$= M \cancel{-2\sqrt{M}} \cancel{+1} \cancel{+2\sqrt{M}} \cancel{-2} \cancel{+1}$$

$$n^2 > M$$

$$\forall M>0 \quad \exists \bar{n} = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 : \forall n>\bar{n} \qquad n^2>M$$

② $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n \longrightarrow 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{\lim 1/n + 1} = 1$$

$= 0$

③ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\log\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n \longrightarrow -\infty$

$$\text{"}\log \frac{1}{+\infty} = \log 0^+ = -\infty\text{"}$$

Osserviamo che $a_n = f(n)$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Se è data $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

ed è noto che $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell} \in \overline{\mathbb{R}}$

allora, posto $a_n = f(n)$ $\quad \left(a_n = f_{|\mathbb{N}}\right)$

si ha che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} f_{|\mathbb{N}} = \ell$

$$f(x) = \log \frac{1}{x+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \log\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \log(0^+)$$

$$= -\infty$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \log \frac{1}{n+1} = \cancel{+}\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^n}$$ non viene da una funzione reale

Se $a_n = f_{|\mathbb{N}}$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
allora $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} a_n$

Teorema (Unicità del limite)

Se il limite di a_n esiste allora è unico

Teorema (limite delle sottosuccessioni) (analogo limite restriz)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \to l \Rightarrow a_{k_n} \to l$ $\forall k : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strettamente crescente

Teorema (Controinominale del precedente)

$\{a_n\}_n$ Se $\exists \{a_{k_n}\}$ e $\{a_{h_n}\}$ due sottosucc.

Tali che $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$

allora $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

$\left\{ \begin{matrix} A \Rightarrow B \\ \text{Teorema} \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{non } B \Rightarrow \text{non } A \\ \text{Controinominale} \end{matrix} \right\}$

Oss ho preso $k \nearrow$ perché voglio che

$+\infty$ sia punto di accumulazione per a_n

e anche per tutte le a_{k_n}

Oss Se $\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = l$ ~~allora~~ $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

Infatti $a_n = (-1)^n$ $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$

Segue dall'unicità del limite

$$\{b_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_n = \{(-1)^{2n+1}\}_n = \{-1\}_n$$

$$\{c_n\}_n = \{a_{2n}\}_n = \{(-1)^{2n}\}_n = \{1\}_n$$

allora $\lim_{n \to +\infty} b_n = -1 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} c_n$

Quello che segue è un analogo del Teorema che affermava " se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f = l = \lim_{x\to x_0^-} f$ allora $\exists \lim_{x\to x_0} f$ "

<u>Teorema</u> $\left(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \right)$

Sia dato $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si supponga che

1) $\exists\, k, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti

e tali che $k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

2) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} = l \in \mathbb{R}$

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

<u>dim</u>

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$, Per ipotesi

•) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 > 0 : \forall n > n_1 \quad l - \varepsilon < a_{h_n} < l + \varepsilon$ <u>Def</u>

•) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 > 0 \quad \forall n > n_2 \quad l - \varepsilon < a_{k_n} < l + \varepsilon$ <u>Def</u>

•) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in h(\mathbb{N})$ o $n \in k(\mathbb{N})$ $\quad h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$\exists$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

fissiamo $\bar{n} = \max\{h_{n_1}, k_{n_2}\}$

Preso $n > \bar{n}$ allora $n > h_{n_1} \geq n_1$ & $n > k_{n_2} \geq n_2$

$\uparrow h \nearrow$ $\uparrow k \nearrow$

ed essendo $h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ si ha che

$\xrightarrow{1^{\circ}}$ o $n \in h(\mathbb{N}) \Rightarrow n = h_m$ per un certo $m \in \mathbb{N}$

$n > \bar{n} = \max\{h_{n_1}, k_{n_2}\}$ $\Rightarrow n = h_m > h_{n_1} \Rightarrow m > n_1$

$\uparrow h \nearrow$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_{h_m} < l + \varepsilon$

o $n \in k(\mathbb{N}) \Rightarrow n = k_g$ per un certo $g \in \mathbb{N}$

$n > \bar{n} = \max\{h_{n_1}, k_{n_2}\}$ $\Rightarrow n = k_g > k_{n_2} \Rightarrow g > n_2$

$\uparrow k \nearrow$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_{k_g} < l + \varepsilon$

$\uparrow$ def a_{k_n}

e dunque

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

che è la Tesi

Esempio

$$\{a_n\}_n \quad a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} = b_n & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 + \frac{1}{n+1} = c_n & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$k: n \to 2n+1$

$$\{b_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\}_n$$

$$\{c_n\}_n = \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \frac{1}{2n}\right\}_n \quad h_2: n \to 2n$$

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 1$$

Teorema (Permanenza segno)

Teorema (Confronto)