Titolo nota 08/11/2010

Def $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per $x \to x_0$, $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $g(x) \neq 0$ in $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$

f e g infinitesime per $x \to x_0$

diciamo $f = o(g)$ per $x \to x_0$ ["f è un "o piccolo" di g per $x \to x_0$"]

ovvero

se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ [f è infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$]

Def $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

$g \neq 0$ in un intorno $U \in \mathcal{U}_{x_0}$

diciamo che f è "asintoticamente equivalente" a g in x_0 se $\displaystyle\exists \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l \in]0, +\infty[$

Esempio (1) $x \sim \frac{x}{3}$ per $x \to +\infty$

infatti, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{x}{x/3}\right| = 3 \in]0, +\infty[$

(2) $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

infatti $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 1 \in]0, +\infty[$

(3) $1 - \cos x \sim x^2$ per $x \to 0$ in

infatti, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left|\frac{1 - \cos x}{x^2}\right| = \frac{1}{2} \in]0, +\infty[$

Oss ① $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se $f(x) = o(1)\, g(x)$ per $x \to x_0$

Oss (fondamentale) quando $x \to x_0$, x_0 p.d.a. per A

$$o(1) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} \;:\; \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \right\}$$

e dunque

$$o(g) = o(1) \cdot g \text{ è un insieme } = \left\{ h : A \to \mathbb{R} : \lim_{x \to 0} \frac{h}{g} = 0 \right\}$$

Infatti,

$$x^4 = o(x^3) \quad \text{per } x \to 0 \quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x} = 0 \right)$$

$$x^5 = o(x^3) \quad \text{"} \quad \left(\lim x^5 / x^3 = 0 \right)$$

$$x^{10} = o(x^3) \quad \text{"} \quad \left(\lim x^{10} / x^3 = 0 \right)$$

$$f = o(g) \text{ per } x \to x_0 \iff \begin{cases} f \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \\ g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \\ f/g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} f \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \\ g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \\ \exists\, \eta \in o(1) : f = \eta \cdot g \end{array}$$

Oss Si dovrebbe scrivere, in luogo di $f = o(x)$, che $f \in o(x)$

Si osservi che

$x^4 = o(x)$ & $x^3 = o(x)$ per $x \to 0$ $\boxed{\text{ma}}$ $x^4 \neq x^3$ per $x \to 0$

Vediamo le proprietà di "o", limitandoci a $g(x) = x$ e $x \to 0$.

Trattandosi di uguaglianze tra insiemi, dovrò sempre verificare la doppia inclusione

① $\boxed{k \cdot o(x) = o(x)}$

$\cancel{S}$ ① $k\, o(x) \subseteq o(x)$ ② $o(x) \subseteq k\, o(x)$

$f \in k\, o(x) \iff \exists \eta \in o(1)$ $f(x) = k \cdot \eta(x) \cdot x$

ma $\lim_{x \to 0} k \cdot \eta(x) = 0$ $(k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f(x) = (k \cdot \eta(x)) \cdot x$ con $k\eta \in o(1)$

$\Rightarrow f \in o(x)$

② $f \in o(x) \iff \exists \eta(x) \in o(1)$ t.c. $f(x) = \eta(x) \cdot x$

$\iff \exists \eta(x) \in o(1)$ t.c. $f(x) = \dfrac{\eta(x)}{k} \cdot k \cdot x$

$\iff$ " t.c. $f(x) = k \cdot \dfrac{\eta(x)}{k} \cdot x$

ma $\dfrac{\eta(x)}{k} \to 0$ $(x \to 0)$ ovvero $\dfrac{\eta(x)}{k} \in o(1)$

$$\Longrightarrow \exists\, \mu(x) = \frac{\eta(x)}{k} \in o(1) \ : \ f(x) = k \cdot \mu(x) \cdot x$$

$$\Longleftrightarrow f(x) \in k\, o(x)$$

② $o(x) + o(x) = o(x) = o(x) - o(x)$

$\exists$ (i) $o(x) + o(x) \subseteq o(x)$ & (ii) $o(x) \subseteq o(x) + o(x)$

(i) $f \in o(x) + o(x) \Longleftrightarrow \exists\, \eta, \mu \in o(1) \quad : f(x) = \eta \cdot x + \mu \cdot x$

$\Longleftrightarrow$ " " $f(x) = (\eta(x) + \mu(x))\, x$

ma $\eta(x) + \mu(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

ovvero $\eta(x) + \mu(x) \in o(1)$

$\Longrightarrow \exists\, \gamma(x) \in o(1) \ : \ f(x) = \gamma(x) \cdot x$

$\Longleftrightarrow f \in o(x)$

(ii) $f \in o(x) \Longleftrightarrow \exists\, \mu \in o(1) \ : \ f(x) = \mu(x) \cdot x$

$\Longleftrightarrow$ " $: f(x) = \frac{\mu(x)}{2} x + \frac{\mu(x)}{2} x$

e $\frac{\mu(x)}{2} \to 0$ ovvero $\frac{\mu(x)}{2} \in o(1)$

$\Longrightarrow \exists\, \gamma, \beta \in o(1) \ : \ f(x) = \gamma(x) \cdot x + \beta(x) \cdot x$

$\Longrightarrow f(x) \in o(x) + o(x)$

$o(x) - o(x) = o(x)$

Questo segue dalle precedenti, in quanto

$-o(x) = (-1)\cdot o(x) = o(x)$ $(*)$

$o(x) + o(x) = o(x)$ $(**)$ $\Longrightarrow$ $\sharp$!!!

(3) $o(o(x)) = o(x)$

(i) $f \in o(o(x)) \iff \exists \beta \in o(1)$ t.c. $f(x) = \beta(x)\cdot o(x)$

$\iff \exists \beta, \gamma \in o(1)$ t.c. $f(x) = \beta(x)\cdot\gamma(x)\cdot x$

ma $\beta\cdot\gamma \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ovvero $\beta\cdot\gamma \in o(1)$

$\Longrightarrow \exists \mu(x) \in o(1)$: $f(x) = \mu(x)\cdot x$

$\iff f \in o(x)$

(ii) $f \in o(x) \iff \exists \mu(x) \in o(1)$: $f(x) = \mu(x)\cdot x$

$\iff$ " : $f(x) = (\mu)^{1/3}\cdot(\mu)^{2/3}\, x$

con $\mu^{1/3} \to 0$, $\mu^{2/3} \to 0$ $\Rightarrow$ $\mu^{1/3} \in o(1)$, $\mu^{2/3} \in o(1)$

$\Longrightarrow \exists \beta, \gamma \in o(1)$: $f(x) = \beta(x)\cdot(\gamma(x)\cdot x)$

$\iff f \in o(o(x))$

④ $x^{\alpha+\beta} = o(x^{\alpha}) \quad \forall \beta>0 \qquad (x \to 0)$

In questo caso non devo fare la doppia inclusione, ma devo solo verif. che

$x^{\alpha+\beta} \in o(x^{\alpha})$

Si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+\beta}}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} x^{\beta} = 0$ essendo $\beta>0$

⑤ $o(x^{\alpha}) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^{\alpha}) \quad \forall \beta>0$

(i) $f \in o(x^{\alpha}) + o(x^{\alpha+\beta}) \iff \exists\, \beta, \gamma \in o(1)$ t.c.

$$f(x) = \beta \cdot x^{\alpha} + \gamma \cdot x^{\alpha+\beta}$$

$\iff \exists\, \beta, \gamma \in o(1)$ t.c.

$$f(x) = \left(\beta(x) + \gamma(x) \cdot x^{\alpha}\right) x^{\beta}$$

ma $\beta + \gamma x^{\alpha} \to 0$ ovvero

$\beta + \gamma x^{\alpha} \in o(1)$

$\Rightarrow \exists\, \mu \in o(1) \mid f(x) = \mu(x)\, x^{\alpha}$

$\iff f \in o(x^{\alpha})$

$$(ii)\quad f \in o(x^\alpha) \iff \exists \mu \in o(1) : f(x) = \mu(x)\, x^\alpha$$

$$\iff \exists \mu \in o(1) : f(x) = \left(\mu(x) - \mu(x)\cdot x^\beta\right) x^\alpha + \mu(x)\, x^{\alpha+\beta}$$

dove $\mu(x) - \mu(x)\, x^\beta \to 0$

$\mu \to 0$

$$\Rightarrow \exists \beta, \gamma \in o(1) : f(x) = \beta(x)\cdot x^\alpha + \gamma(x)\, x^{\alpha+\beta}$$

$$\iff f(x) \in o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta})$$

⑥ $x^\beta o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$

$$(i)\quad f \in x^\beta o(x^\alpha) \iff \exists \gamma \in o(1) \quad f(x) = x^\beta \cdot \gamma(x) \cdot x^\alpha$$

$$\iff \quad " \quad f(x) = \gamma(x)\cdot x^{\alpha+\beta}$$

$$\Rightarrow \quad " \quad f(x) \in o(x^{\alpha+\beta})$$

$$(ii)\quad f \in o(x^{\alpha+\beta}) \Rightarrow \exists \gamma(x) \in o(1) : f(x) = \gamma(x) \cdot x^{\alpha+\beta}$$

$$\iff \quad " \quad : f(x) = x^\beta \cdot \gamma(x) \cdot x^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^\beta o(x^\alpha) \quad \text{ovvero}$$

⑦ $o\left(x^{\alpha}+o(x^{\alpha})\right)=o(x^{\alpha})$

(i) $f\in o\left(x^{\alpha}+o(x^{\alpha})\right) \iff \exists \eta \in o(1) : f(x)=\eta\cdot x^{\alpha}+\eta\cdot o(x^{\alpha})$

$\iff \exists \eta ; \mu \in o(1) : f(x)=\eta x^{\alpha}+\eta\cdot\mu\cdot x^{\alpha}$

$\iff \exists \eta, \mu \in o(1) : f(x)=(\eta+\eta\cdot\mu)\, x^{\alpha}$

car $\eta+\eta\mu \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Rightarrow \exists \gamma \in o(1) : f(x)=\gamma(x)\, x^{\alpha}$

$\iff f\in o(x^{\alpha})$

Principio di sostituzione dell'infinitesimo

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, f e g infinitesime per $x \to x_0$

Allora quando $x \to x_0$

$$\frac{f}{g} \quad e \quad \frac{f+o(f)}{g+o(g)}$$

hanno lo stesso carattere.

dim

Si osserva che

$$\frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \frac{f}{g} \cdot \frac{1+\frac{o(f)}{f}}{1+\frac{o(g)}{g}}$$

ma $\frac{o(f)}{f} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ & $\frac{o(g)}{g} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

e dunque $$\frac{1+\frac{o(f)}{f}}{1+\frac{o(g)}{g}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$$

e quindi la tesi $\blacksquare$

Esempio Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x+1-\cos x}{x}$ (*)

Tutti i limiti fondamentali vanno ricordati poiché servono per calcolare gli altri limiti

Osservo che il limite (*) è della forma $0/0$

Ora ricordo che $\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1/2$

ovvero $\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ovvero $1-\cos x-\frac{1}{2}x^2 = o(x^2) \quad x\to 0$

ovvero $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2+o(x^2) \quad x\to 0$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x = o(x) \quad x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\overbrace{1-\cos x}^{=o(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$\boxed{//}$

Esercizio Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{2x + \operatorname{sen}^2 x}{x + 1 - \cos x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \iff \operatorname{sen}^2 x - x^2 = o(x^2) \quad x \to 0$$

$$\iff \operatorname{sen}^2 x = \underbrace{x^2}_{= o(x)} + \underbrace{o(x^2)}_{= o(x)} \quad x \to 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = o(x) + o(x) = o(x)$$

$$1 - \cos x = o(x) \quad x \to 0 \quad \text{(vedi esercizio precedente)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + \operatorname{sen}^2 x}{x + 1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

Esercizio $\quad \cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad$ per $x \to 0$

dim

Come so? $\quad \operatorname{sen} x = x + o(x) \quad$ per $x \to 0$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y) \quad \text{per } y \to 0$$

osservo che $\operatorname{sen} x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{(x + o(x))^2}{2} + o\left([x + o(x)]^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x) \cdot o(x)\right)$$

$$+ o\left(x^2 + 2\, o(x^2) + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2) + o(x^2)\right)$$

$$+ o\left(x^2 + o(x^2) + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right) + o\left(x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

Esercizio $\qquad \dfrac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$

(come pure $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$

etc)

Dim

Si deve provare $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$

Ricordiamo che $\dfrac{1}{1-x} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$

$= \quad " \quad (1+x+x^2+\dots+x^n)$

Partiamo osservando che $1-x^2 = 1+o(x)$

$\Rightarrow \quad (1-x)(1+x) = 1+o(x) \qquad x\to 0$

$\Rightarrow \quad 1+x = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{o(x)}{1-x}$

Prendendo $|x|<1$

$\Rightarrow \quad 1+x = \dfrac{1}{1-x} + o(x) \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$

Analogamente $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3 = 1+o(x^2)$

da cui segue $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2)$

Def $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A,

f infinitesimo per $x \to x_0$ diciamo

$\boxed{f \text{ infinitesimo di ordine } \alpha \text{ per } x \to x_0}$

Dare ordine infinitesimo è come la velocità

se

$$\exists\, L \neq 0 : f(x) = L \cdot |x - x_0|^\alpha + o\left(|x - x_0|^\alpha\right) \quad x \to x_0$$

$L \cdot |x - x_0|^\alpha$ = parte principale

α = ordine di infinitesimo

Esempio

per $x \to 0$

$x \cos x - x$ è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $-\frac{x^3}{2}$

dim

$$1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$f(x) = x\cos x - x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \cancel{x}$$

$$= -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

Parte principale $= -\dfrac{x^3}{2}$

Ordine $= 3$

<u>Nota Bene</u> se nella f.ne $f(x) = x\cos x - x$

avessi preso come sviluppo di $\cos x$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

allora $f(x) = x\left(1 + o(x)\right) - x$

$$= x + o(x^2) - x$$

$$= o(x^2)$$

e non si sa dire né chi sia la P.P.

né " " l'ordine

Introduzione agli sviluppi

sia dato $P(x) = \underline{3 + x - 4x^2 - 2x^4 + x^7}$

Questo è un polinomio di grado 7 a coeff reali

(quando $x \to 0$:

$P(x) = 3 + o(1)$

$x - 4x^2 - 2x^4 + x^7 = o(1)$ (è infinitesimo)

$P(x) = 3 + x + o(x)$

$-4x^2 - 2x^4 + x^7 = o(x)$

$$P(x) = 3 + x - 4x^2 \underbrace{- 2x^4 + x^7}_{-2x^4 + x^7 = o(x^2)}$$

$P(x) = 3 + x - 4x^2 + o(x^2)$

ma $-2x^4 + x^7 = o(x^3)$

$P(x) = 3 + x - 4x^2 + o(x^4)$ ← ci sono + informaz.

$36{,}667 = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 6\, 10^{-2} + 7\, 10^{-3}$

E se dovessi ricavare i coeff a ritroso?

Ovvero dovessi determinare $a_0, \dots, a_7$ t.c.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_7 x^7 \,?$$

$$a_0 = P(0)$$

$$a_1 = \left. \frac{P(x) - P(0)}{x} \right|_{x=0}$$

$$a_2 = ?$$

Come si ricavano le cifre di un numero decimale ??

Con un polinomio questo procedimento termina mentre con una f. ne generica, il polinomio approx. può avere grado grande a piacere

N.B. più alto il grado, più precisa l'approx nel punto x_0 ma più grande il lavoro,

Sviluppi di Taylor (in $x=0$)

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad \operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$$

$o(x^8)$ è molto piccolo, "più piccolo" di x^8, ma solo quando $x \to 0$!!!

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^3} = 0$$

infatti $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, perciò

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = 0$$

$f(x) = \cos x$ $\quad \cos x = 1 + o(x)$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$\cos(x) = 1 + o(x)$ ← lo conosciamo

$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ lo conosciamo

$= 1 - x^2/2 + o(\underline{x^3})$ non lo conosciamo

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

$f(x) = \mathrm{Tg}\, x$ $\quad \mathrm{Tg}\, x = x + o(x^2)$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ $\quad \mathrm{arctg}\, x = x + o(x)$

$$= x - x^3/3 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\mathrm{arctg}\, x = x + o(x)$ lo conosciamo

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + o(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$e^x = 1 + o(1)$ lo conosceva

$e^x = 1 + x + o(x)$ lo conosceva

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$f(x) = \log(1+x)$ $\quad \log(1+x) = x + o(x)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$\log(1+x) = o(1)$ lo conosceva

$= x + o(x)$ " "

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Esercizio

$$\boxed{(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}}$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \alpha x + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ (quando $k \in \mathbb{N}$, si ritrova il coeff. binomiale)

dim

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$$

Calcoliamo polin 3° ordine

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{\alpha y} = 1 + \alpha y + \alpha^2 \frac{y^2}{2} + \alpha^3 \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$e^{\alpha \log(1+x)} = 1 + \alpha\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2}\left[\ \text{---}\ \right]^2 + \frac{\alpha^3}{6}\left[\ \text{---}\ \right]^3$$

$$+ o\left(\left[\ \text{---}\ \right]^3\right)$$

$$= 1 + \left[\alpha x - \alpha \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2}\left[x^2 - x^3 + o(x^3)\right]$$

$$+ \frac{\alpha^3}{6}\left[x^3 + o(x^3)\right] + o\left(\left[x^3 + o(x^3)\right]\right)$$

$$= 1 + \alpha x + x^2\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right) + x^3\left[\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right] + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)$$

$\blacksquare$

Esempio

$$\sqrt{65} = \sqrt{1+64} = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{1/2}$$

$$\overset{?}{=} 8 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{64}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3\right]$$

$$= 8\left[1 + \frac{1}{128} - \frac{1}{8^5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{8^7}\right]$$

questi contributi sono molto piccoli: se prendiamo

$$8 \cdot \left[1 + \frac{1}{128}\right]$$ abbiamo

una buona approx della radice.