Limiti - lezione 4 - giovedì 11 novembre 2010

Titolo nota 11/11/2010

Teorema (cambio di variabile nei limiti)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad g: B \to \mathbb{R}$ $\qquad$ con $f(A) \cap B \neq \emptyset$

x_0 p.d.a. per A $\qquad$ y_0 p.d.a. per B

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ $\qquad$ $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

Se vale una delle seguenti ipotesi

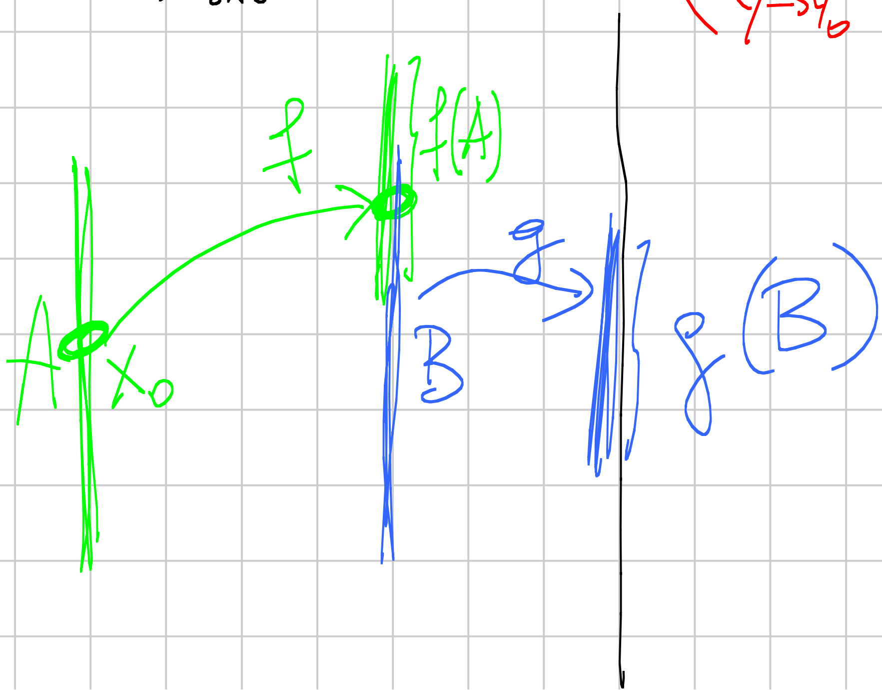
L'ipotesi 2 chiede che esista $W_0 \in \mathcal{J}_{x_0}$ t.c. $f(W_0 \setminus \{x_0\}) \not\ni y_0$

$\Rightarrow$ 1) $\exists W_0 \in \mathcal{J}_{x_0} : \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W_0 \quad f(x) \neq y_0$

oppure 2) g continua in y_0, ovvero $g(y_0) = \ell$

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell \quad \left(= \lim_{y \to y_0} g(y) \right)$$



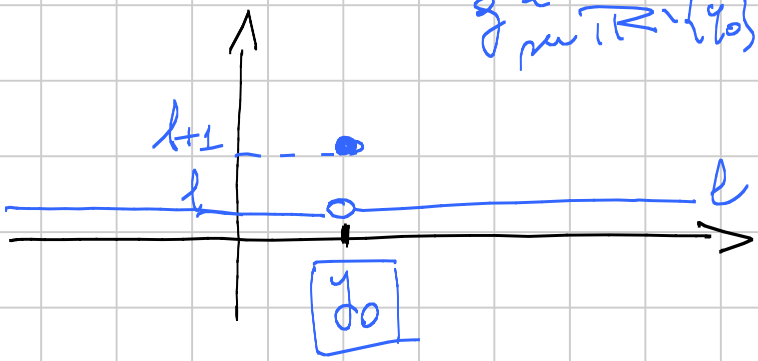
Non facciamo la dim., ma vediamo solo il seguente

Controesempio $\quad f : A \to \mathbb{R} \quad g : B \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = y_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

g è continua per $\mathbb{R}\setminus\{y_0\}$

$$g(y) = \begin{cases} \ell & \text{se } y \neq y_0 \\ \ell+1 & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$



Ora si ha che (•) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ (è la f.ne costante)

mentre (••) $\boxed{\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to y_0} g_{|\mathbb{R}\setminus\{y_0\}}} = \ell$ Vale in generale

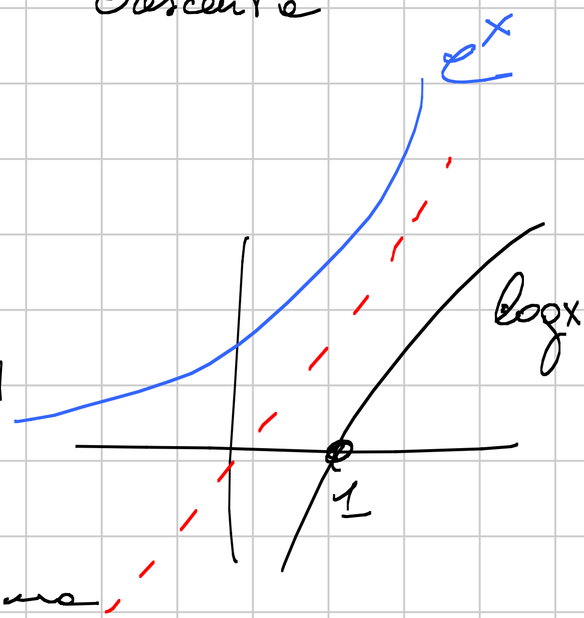
mentre $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y_0) = \ell+1$

e dunque (•••) $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell+1$ (è una f.ne costante)

g non è continua & $f(\mathbb{R}) = \{y_0\}$ non è soddisfatta l'Hp. (1)

$f(x)=e^x$ monot strett. crescente $: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_e x :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ monotona strett. crescente



$\log(x\cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x,y>0$

$\log(1) = 0 \qquad (e^0=1)$

$\log x$ è $\begin{cases} >0 & \text{se } x>1 \\ <0 & \text{se } x<1 \end{cases}$

$1+x=e^t$ Trasf continua

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{t\to0}\frac{\log(e^t)}{e^t-1} = \lim_{t\to0}\frac{t}{e^t-1}=1$$

$x \longrightarrow t = \log(1+x) \qquad \boxed{x=e^t-1}$

↑ è continua in $\boxed{x=0}$

$x\to0 \Rightarrow t\to0$

$$\lim_{x\to0^+}\log x = -\infty \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+\right)$$

$\log x = t \qquad x \longmapsto \log x = t$ questo non è continua in $t=-\infty$

$x=e^t \qquad x\to0 \Rightarrow t\to-\infty$

$\Longrightarrow \lim_{x\to0^+}\log x \overset{\downarrow}{=} \lim_{t\to-\infty} t = \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} a^x := e^{x \log a} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \boxed{a>0}}$$

Def di potenza e exp reale

perché siamo in $\mathbb{R}$

Oss $a^2 = a \cdot a \qquad a^3 = a^2 \cdot a \quad \dots \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$

mi trovo nei pasticci quando devo def. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

Nota la def. di a^x è coerente?, ovvero, se calcolo 2^3 con questa def, che succede?

$$2^{3 \leftarrow x} = e^{3 \cdot \log 2} = e^{\log 2^3} \overset{\downarrow}{=} 2^3$$

$\uparrow a$

Si riesce a dare un senso a $(-2)^3 = -8$

se invece si considera $(-2)^3 \overset{?}{=} e^{3\log(-2)}$

Per risolvere questo pb. si passa a $\mathbb{C}$

$x>0$

$$x^\beta = e^{\beta \log x} \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Esercizio $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \underset{x=e^t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(e^t)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

$\boxed{\text{Osservazione}}$ $\log x$, per $x\to+\infty$, è "più lento" di $\forall$ potenza positiva di x, ovvero x^k $\forall k>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0 \ \forall k>0$$

$\boxed{\text{Osservazione}}$ e^x, per $x\to+\infty$, è "più veloce" di $\forall$ potenza positiva di x (x^k $\forall k>0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \ \forall k>0$$

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{quando } 1<a \\ 0^+ & \text{quando } 0<a<1 \end{cases} \qquad \forall \beta\in\mathbb{R}$$

$q>0$
$x>0$

$$\frac{q^{x}}{x^{\beta}} = \frac{e^{x\log q}}{e^{\beta\log x}} = e^{x\log q - \beta\log x}$$

$$= e^{x\left(\log q - \frac{\log x}{x}\cdot\beta\right)}$$

calcolo di questo

$$x \longrightarrow x\left(\log q - \frac{\log x}{x}\cdot\beta\right) \longrightarrow e^{[\quad]}$$

mi sono ridotto a calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\log q - \beta\frac{\log x}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\log q - \beta\frac{\log x}{x}\right)$$

$$+\infty \cdot (\log q) = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ -\infty & 0<q<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{[\quad]} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & 0<q<1 \\ e^{+\infty} = +\infty & q>1 \end{cases}$$

$$f(x) = \left[x\left(\log q - \beta\frac{\log x}{x}\right)\right] \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{z\to+\infty} e^{z} = +\infty \qquad \lim_{z\to-\infty} e^{z} = 0$$

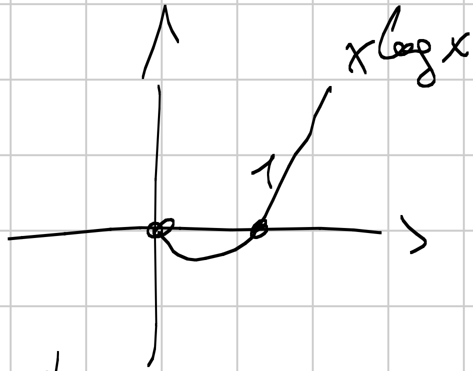
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{f(x)}$$

Esercizio

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0^+ & 1<a \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases} \qquad \forall \beta\in\mathbb{R}$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \boxed{0^-}$$



$x=e^t \qquad x \longrightarrow t=\log x \qquad z=-t$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x \overset{\downarrow}{=} \lim_{t\to-\infty} e^t\cdot t \overset{\downarrow}{=} \lim_{z\to+\infty} e^{-z}\cdot(-z)$$

$$= -\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^z} = 0^-$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{x=\operatorname{tg}t}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}t)}{\operatorname{tg}t}$$

$$= \lim_{t\to 0} t\,\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen} t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t$$

$$= 1\cdot 1 = 1$$

Esercizio $\lim_{x \to 0} x^x = 1$

$$\lim_{x \to 0} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \to 0} x \log x} = e^{0^-} = \exp(0^-) = 1$$

Esercizio $\lim_{x \to 0} x^\beta \log x = 0^- \quad \forall \beta > 0$

trasformo $\log x = t$

Studio locale di una funzione

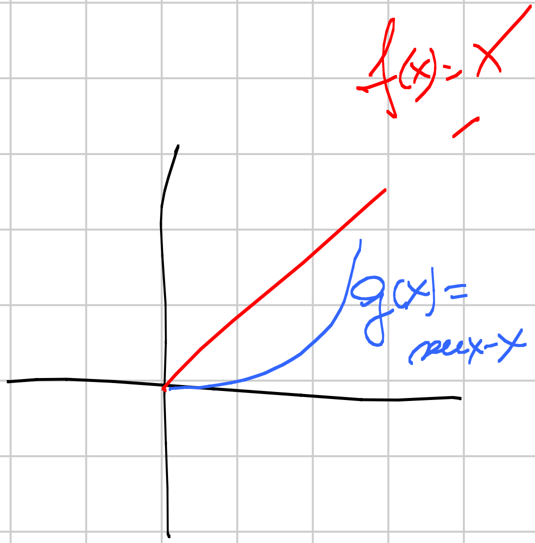
Idea di Newton: i polinomi approssimano qualsiasi funzione

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

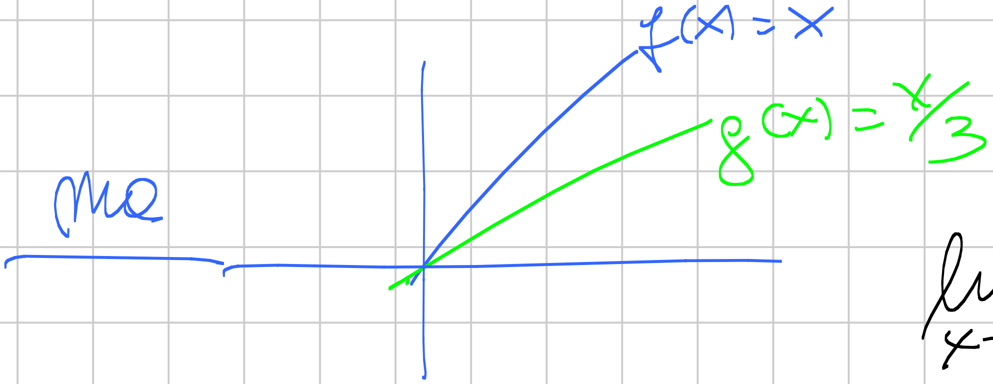
Abbiamo visto che $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$



ma



$\lim_{x \to 0} \frac{x/3}{x} = \frac{1}{3}$

tende a 0 più velocemente

$(\operatorname{sen} x - x) \ll x$ quando $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0$

$1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \ll x^2$

Sembra che $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = x^2 \cdot$ [qualcosa che va a zero]

Infinitesimi & infiniti & loro confronto

<u>Oss</u> $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$

va a zero + velocemente

$$\iff \operatorname{sen} x - x \prec x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^2} = 0$$

$$\iff 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \prec x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

Definizione

$f: A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 p.d.a. per A

$f(x)$ si dice "infinitesimo" per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

Scriveremo che "$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$"

simbolo di Landau

<u>Oss</u> $o(1)$ non è una funzione, ma un insieme di funzioni

$$o(1) = \{ g : U_0 \to \mathbb{R} \ : \ \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \} \ni x^2, \ni x^3$$

è più corretto scrivere $f(x) \in o(1)$

Def $f,g: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per $x \to x_0$, ///

$\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $g(x) \neq 0$ in $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$ ///

f e g infinitesime per $x \to x_0$ ///

diciamo $f = o(g)$ per $x \to x_0$ ["f è un "o piccolo" di g per $x \to x_0$"]

ovvero

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ [f è infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$]

Def $f,g: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

$g \neq 0$ in un intorno $U \in \mathcal{U}_{x_0}$

diciamo che $f \sim g$ per $x \to x_0$ se $\exists \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f}{g}\right| \in]0, +\infty[$

asintoticamente equivalente

Esempio $x \sim \frac{x}{3}$ per $x \to 0$ infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x/3} = 3$

$x - \operatorname{sen} x = o(x)$ per $x \to 0$ infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = 0$

Oss ① $f = o(g)$ per $x \to x_0$ sse $f(x) = o(1)\, g(x)$ per $x \to x_0$

Oss (fondamentale) quando $x \to x_0$, x_0 p.d.a. per A

$$o(1) = \{ f : A \to \mathbb{R} \; : \; \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \}$$

e dunque

$$o(g) = o(1) \cdot g \text{ è un insieme} = \{ h : A \to \mathbb{R} : \lim_{x \to 0} \frac{h}{g} = 0 \}$$

Infatti

$$x^6 = o(x^3)$$

$$x^5 = o(x^3)$$

$$x^{10} = o(x^3)$$

per esempio $\lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^3} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x^3} = 0$

Quando si scrive $f = o(g)$ per $x \to x_0$

stiamo dicendo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0$ Eq.

ovvero che $\exists\, \eta(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ e $f(x) = \eta(x)\, g(x)$ per $x \to x_0$

In particolare $f = o(x^\alpha) \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$

$\iff f(x) = \boxed{o(1)} \cdot x^\alpha \ (x \to 0)$

$\boxed{\begin{array}{l} \eta(x) \in o(1) \\ \eta(x) \to 0 \quad x \to 0 \end{array}}$

Proprietà quando $x \to 0$

① $\boxed{k \cdot o(x) = o(x)}$ per $x \to 0$

$\left(k \cdot o(1) = k \{ f : A \to \mathbb{R} : \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \} = \{ f : A \to \mathbb{R} \ \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \} = o(1) \ x \to 0 \right)$

Noi dobbiamo provare che

$k\,o(1) \subseteq o(1)$ ①

$k\,o(1) \supseteq o(1)$ ②

① $f \in k \cdot o(1) \iff \exists \eta(x) \in o(1) \ (\eta(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0) : k \cdot \eta(x)$ $f(x)$

$\iff \frac{f(x)}{k} = \eta(x) \iff \frac{f(x)}{k} \in o(1)$

k è una costante $\neq 0$

$\iff \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \iff f(x) \in o(1)$

In tal modo è provata la doppia inclusione

(2) $o(x)+o(x) = o(x)-o(x) = o(x)$ SONO INSIEMI

$$o(x)+o(x) \underset{\supseteq\ (2)}{\overset{(1)\ \subseteq}{=}} o(x)$$

$$f(x)\in o(x)+o(x) \Longrightarrow \exists\, \eta_1\in o(1),\ \eta_2\in o(1)\ \text{t.c.}$$

$$f(x)=\eta_1(x)\cdot x+\eta_2(x)\cdot x$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=\left(\eta_1(x)+\eta_2(x)\right)\cdot x$$

$$\text{ma } \left(\eta_1(x)+\eta_2(x)\right)\in o(1)$$

$$\Longrightarrow f(x)\in o(x)$$

Adesso si deve provare che $o(x)\subseteq o(x)+o(x)$

$$f\in o(x)\Longrightarrow \exists\,\eta(x)\in o(1) : f(x)=\eta(x)\cdot x$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=\left(\frac{\eta(x)}{2}+\frac{\eta(x)}{2}\right)x$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=\frac{\eta(x)}{2}\cdot x+\frac{\eta(x)}{2}\cdot x$$

$$\text{ma } \frac{\eta(x)}{2}\cdot x\in o(x)$$

$$\Longrightarrow f(x)\in o(x)+o(x)$$

③ $o(o(x)) = o(x)$

④ $x^{\alpha+\beta} = o(x^{\alpha}) \quad \forall \beta > 0$

⑤ $o(x^{\alpha}) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^{\alpha}) \quad \forall \beta > 0$

⑥ $x^{\beta} o(x^{\alpha}) = o(x^{\alpha+\beta}) \quad \forall \beta > 0$

⑦ $o(x^{\alpha} + o(x^{\alpha})) = o(x^{\alpha})$

Principio di sostituzione dell'infinitesimo

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, f e g infinitesime per $x \to x_0$

Allora quando $x \to x_0$

$$\frac{f}{g} \quad e \quad \frac{f+o(f)}{g+o(g)}$$

$$\frac{o(f)}{f} \to 0 \qquad \frac{o(g)}{g} \to 0$$

hanno lo stesso carattere.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^4+(\operatorname{sen} x)^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4}$$

Segue immediatamente dall'osservare che

$$\frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \frac{f}{g} \cdot \left[\frac{1+\frac{o(f)}{f}}{1+\frac{o(g)}{g}}\right]$$

e si ha che $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left[\quad\right] = \dots = \frac{1+\lim_{x\to x_0}\frac{o(f)}{f}}{1+\lim_{x\to x_0}\frac{o(g)}{g}}$