Limiti - lezione 3 - martedì 9 novembre 2010

Titolo nota 08/11/2010

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

dim

$0/0$

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1 \quad \forall x \ne 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 x \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le 1 \quad \forall x \ne 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2 x \le \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \le 1 \quad x \ne 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos^2 x}{1+\cos x} \le \frac{(1-\cos x)}{x^2} \cdot \cancel{(1+\cos x)} \le \frac{1}{1+\cos x} \quad \begin{matrix} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \ne 0 \end{matrix}$$

$$f(x) \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le h(x) \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x \to 0} \cos x}{1 + \lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{1 \cdot 1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{1+\cos x} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{2}$$

per il Thm dei carabinieri

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} f = \lim_{x\to 0} g = \frac{1}{2}$$

<u>Esercizio</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Quando si è provato che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, si aveva che

$$\frac{\cos^2 x}{1+\cos x} \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{1}{1+\cos x} \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$$

da cui segue

$$x \cdot \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} \le \frac{1-\cos x}{x} \le \frac{x}{1+\cos x} \qquad \forall x \in \dots$$

$x \to 0$: 0

per il thm. carabinieri

$x \to 0$: 0

$x \to 0$: 0

La funzione esponenziale $e^x : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ è una forma indeterminata del tipo 1^∞

$$= 2,7\ldots$$

Vedremo che $\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$

Interessi composti

(i = interesse)
(C = capitale)

Capitale $(T=0)$ Capitale $(T = 1\text{ anno})$

Se gli interessi vengono dati a fine anno

$$C(0) = C \qquad C(T) = C(0)\cdot(1+i)$$

Se gli interessi vengon dati 2 volte in un anno

$$C(0) = C \qquad C\left(\frac{T}{2}\right) = C\cdot\left(1+\frac{i}{2}\right) \qquad C(T) = C\cdot\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$$

Se gli interessi vengono dati 3 volte in un anno

$$C(0) = C \to C\left(\frac{T}{3}\right) = C\cdot\left(1+\frac{i}{3}\right) \to C\left(T\cdot\frac{2}{3}\right) = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$C(T) = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^3$$

Proseguendo, si arriva al caso in cui vengono dati n volte in un anno

$$C(T) = C\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$$

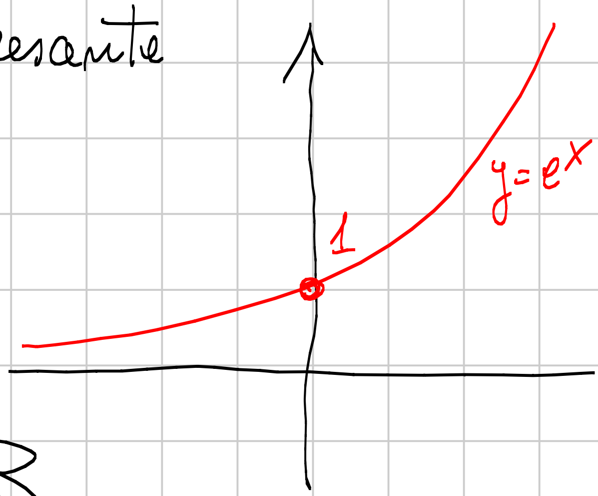
Quando $n\to\infty$, $C(T) \longrightarrow C\cdot e^i$!!!

1) e^x monotona strettamente crescente

2) $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

3) $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $1+x \le e^x \le 1 + x \cdot e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$



le diamo per buone (crodolinfatte!!)

a) $e^0 = 1$

dalla 4) si ha $\quad 1+x \le e^x \le 1 + x \cdot e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

inoltre, se $\quad x \in [-1,1] \qquad e^x \le \max_{x\in[-1,1]} e^x = e^1 = e$

↑ e^x è strett. crescente

e dunque

$$1+x \le e^x \le 1 + x\cdot e^x \le 1 + x \cdot e \qquad \forall x \in [-1,1]$$

$1+x \xrightarrow{x\to 0} 1 \qquad e^x \xrightarrow{x\to 0} 1 \qquad 1 + x\cdot e \xrightarrow{x \to 0} 1$

x il Teorema Carabinieri

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

per la (i) si ha $\quad 1 + x \le e^x \le 1 + x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$x \le e^x - 1 \le x e^x \qquad x \neq 0 \text{ (devo fare limite)}$$

$$\begin{cases} x > 0 & 1 \le \dfrac{e^x - 1}{x} \le e^x \\[2ex] x < 0 & 1 \ge \dfrac{e^x - 1}{x} \ge e^x \end{cases}$$

$$\min\{1, e^x\} \le \frac{e^x - 1}{x} \le \max\{1, e^x\} \quad \forall x \neq 0$$

$\min\{1, e^x\} \xrightarrow{x \to 0} 1$

$\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1$ x il Teorema dei 2 carabinieri

$\max\{1, e^x\} \xrightarrow{x \to 0} 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Sempre utilizzando la (i) si ottiene

$$e^x \ge 1 + x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ma $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

Si sfrutta il fatto che $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

" " " " " $e^{x+y} = e^x e^y$

" " " " " $e^0 = 1$

$$e^0 = 1 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} =$$

$y=-x$

$x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty$

$$= \frac{1}{\lim_{y\to+\infty} e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

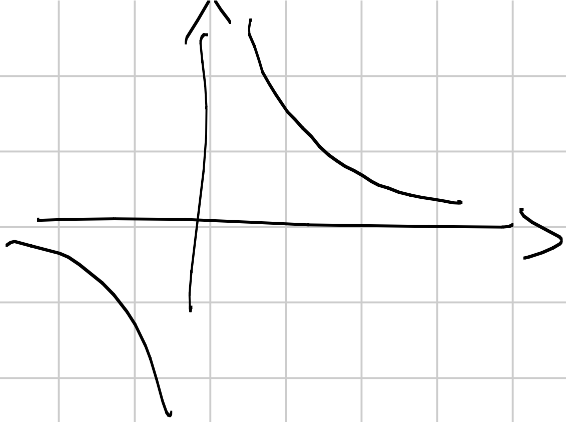
<u>Def</u> $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

diciamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$, con $\ell\in\mathbb{R}$,

<u>se</u> $\forall \varepsilon>0\ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} : \forall x \in A\setminus\{x_0\}\ x\in U \Rightarrow$

$$\ell \le f(x) < \ell+\varepsilon$$

Esempio $\quad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$



$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

diciamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$, $\ell \in \mathbb{R}$

se $\forall \varepsilon>0\ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} : \forall x \in A\setminus\{x_0\}\quad x\in U \Rightarrow$

$$\ell - \varepsilon < f(x) \le \ell$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (Tende a $+\infty$ più velocemente di $\forall$ potenza di x)

L'idea è semplice: si fissi $k=5$

Se $e^x \ge 1+x$ allora

$$e^x = \left(e^{x/2}\right)^2 \ge \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \ge \frac{x^2}{4}$$

$$e^x = \left(e^{x/6}\right)^6 \ge \left(1+\frac{x}{6}\right)^6 \ge \frac{x^6}{6^6}$$

e quindi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} \ge \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{6^6}\cdot\frac{1}{x^5} = +\infty$!

Iterando questo procedimento si ha

$$\frac{e^x}{x^{1000}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Infatti, $\quad e^x = \left(e^{x/1001}\right)^{1001} \geq \frac{x^{1001}}{(1001)^{1001}}$

f) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

In questo caso ci si deve ricondurre a limiti noti.

Se si pone $\quad 1+x = e^t \quad$ ovvero $\quad x \longmapsto \log(1+x) = t$

si ha che $\quad x \to 0 \Rightarrow t \to \log(1+0) = 0$

mentre il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \underset{t=\log(1+x)}{=} \lim_{t\to 0} \left(e^t\right)^{\frac{1}{e^t-1}}$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\left(\frac{t}{e^t-1}\right)}$$

$$= e^1 = e$$

in quanto $\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1$ ▨

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Anche questo limite è nella forma 1^∞, e

con un semplice cambio di variabili

$t = 1/x$ ovvero $x \longmapsto 1/x = t$

si ha che $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$

(*)

e dunque $\lim_{x \to +\infty} (1+1/x)^x = \lim_{y \to 0^+} (1+y)^{1/y} \overset{(*)}{=} e$

in quanto $\lim_{y \to 0^+} (1+y)^{1/y} = e$ è stato

provato nel punto precedente.

h) $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$ (continuità della f.ne e^x)

$$e^x = e^{x - x_0 + x_0} = e^{x-x_0} \cdot e^{x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} e^{x-x_0}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} e^{x-x_0}$$

$(y = x - x_0)$ $= e^{x_0} \lim_{y \to 0} e^y$

$x \longrightarrow y = x - x_0$ $= e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ diciamo che

"f continua nel punto x_0" **se**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$$

Oss 1) È la definizione di limite, ma $\ell = f(x_0)$

il limite, nel caso di una f.ne continua, non devo cercarlo perché è noto

$$\ell = f(x_0)$$

ovvero "il valore di f calcolato in x_0"

2) In questa definizione, $\underline{\underline{x_0 \in A}}$ (deve essere definito $f(x_0)$!!!). x_0 non può essere di accumulazione per A ed esterno!!!

3) In questa definizione x_0 può essere $\begin{cases} \text{p.d.a. per } A \\ \text{pto isolato per } A \end{cases}$

Se x_0 è isolato per f allora $f(x)$ è continua in x_0 ✓

infatti

OSS. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ isolato

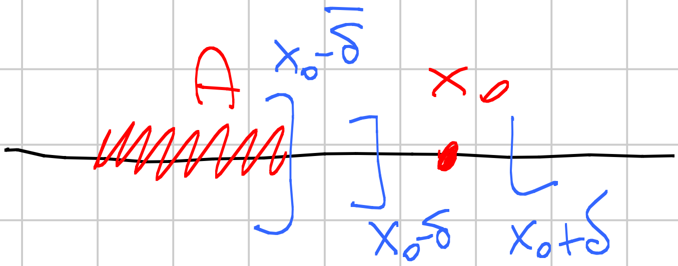
allora f è continua in x_0

<u>dim</u>

$$Ts \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

x_0 è isolato per A, ovvero $\exists\ ]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[\ \in \mathcal{U}_{x_0}$

t.c. $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \cap A = \{x_0\} \quad \forall \delta < \bar{\delta}$



$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ \delta<\bar{\delta},\ :\ \forall x\in A\ \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

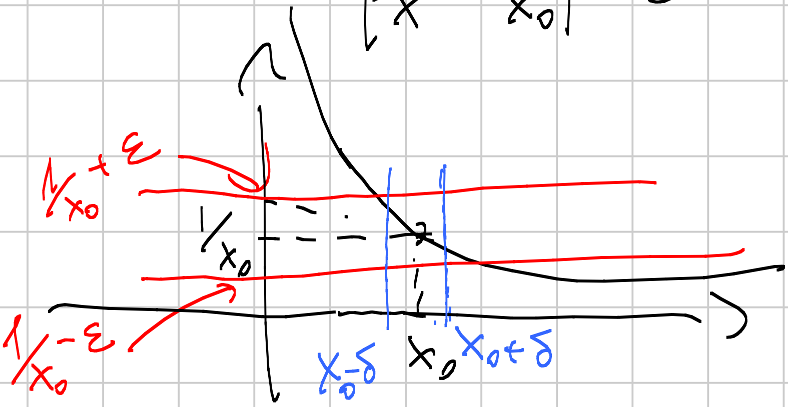
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ (\delta<\bar{\delta})\ \ \forall x\in A\cap\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, =\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Ma sotto queste ipotesi, essendo x_0 isolato per A, si avrà $A\cap\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \equiv\{x_0\}$

e dunque devo testare $|f(x)-f(x_0)|$ nel solo punto x_0, ove $|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$!!! ∎

<u>Esempio</u> <u>dim</u> $f(x)=1/x$ è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

<u>Sia</u> $x_0>0$. Il mio obbiettivo è, fissato $\varepsilon>0$, trovare $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$ t.c. quando $|x-x_0|<\delta$ si ha $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$



$$\boxed{f(]x_0-\delta, x_0+\delta[) \subseteq\ ]1/x_0-\varepsilon, 1/x_0+\varepsilon[}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ : \quad f(]x_0-\delta, x_0+\delta[) \subseteq \,]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x\, x_0|} < \varepsilon$$

quando $|x - x_0| < \delta$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

essendo $x_0 > 0$, posso sempre prendere δ suff. piccolo in modo che $0 < x_0 - \delta$

$$0 < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{1}{x_0+\delta} < \underbrace{\frac{1}{x} < \frac{1}{x_0-\delta}}$$

$|x - x_0| < \delta$

$$\frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \underbrace{\frac{\delta}{|x_0|\,|x_0-\delta|}}_{\text{non compare } x \,!!} \overset{\text{impongo}}{=} \varepsilon$$

ricordo $x_0 > 0$, $x_0 - \delta > 0$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{x_0 (x_0 - \delta)} \iff x_0^2 \varepsilon - \varepsilon\delta = \delta$$

$$\Leftrightarrow \delta(1+\varepsilon) = x_0^2 \cdot \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta = x_0^2 \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \delta(x_0, \varepsilon)$$

$\boxed{x_0 > 0}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) = x_0^2 \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ t.c.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

bisogna fare conti pressoché identici per $x_0 < 0$ $\blacksquare$

Esempio (f.ne discontinua)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$ non è continua in $x_0=0$

dim

$f(0)=1$ per definizione di f,

però $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste e dunque

f non può essere continua in quanto

dovrebbe aversi $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

il che non può essere $\blacksquare$

Teoremi algebrici (sulle funzioni continue)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ continue in x_0. Allora

1) $f+g$ continua in x_0

2) $f \cdot g$ " " "

3) f/g " " " quando $g(x_0) \neq 0$

Essendo $f(x_0), g(x_0) \in \mathbb{R}$ queste espressioni hanno sempre senso

Le dimostrazioni sono identiche a quelle fatte nel corso dei limiti

Abbiamo provato che le funzioni

$f(x) = 1$

$f(x) = x$ ovvio

$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ ieri

$f(x) = \cos x$

$f(x) = e^x$ oggi

sono continue $\forall x \in \mathbb{R}$ (x^k, se $k<0$, lo è in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Domanda: la funzione $e^{\operatorname{sen}(x^3)}$ è continua?

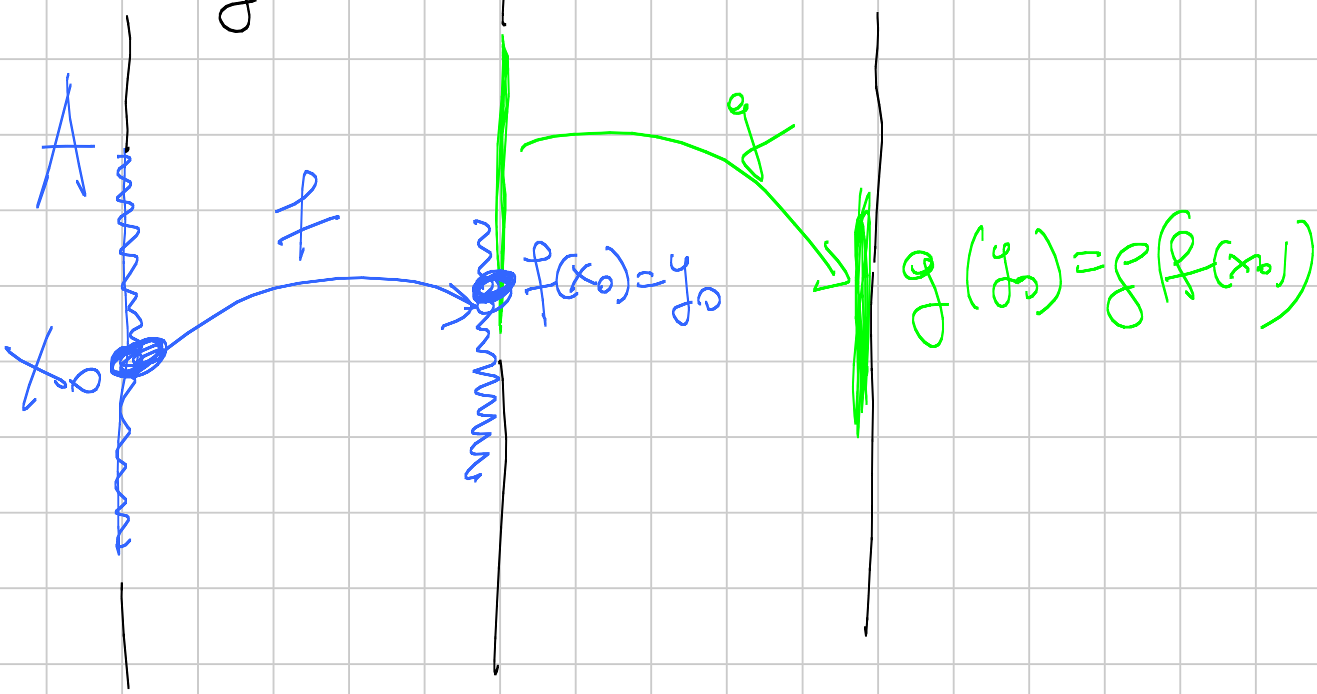
Con la definizione, la dimostrazione è impraticabile

Teorema (continuità della composizione)

$f: A \to \mathbb{R}$ continua in x_0

$g: B \to \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0) \in B$

Allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0



dim

$$\forall \mu > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \mu$$

continuità di f in x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mu > 0 : |y - y_0| < \mu \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

continuità di g in y_0

$$\boxed{|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \mu \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon}$$

$\mu = \mu(\varepsilon, f(x_0))$ $\quad \delta = \delta(\mu, x_0) = \delta(\varepsilon, x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mu > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \mu$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

ovvero, tralasciando le parti cerchiate in verde

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

■

Cambio di variabili nei limiti

Quando si deve calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

si vuole porre $z = \cos x - 1$

ovvero
$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$$
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$$
??? $\Downarrow$???
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\cos x-1)}{\cos x-1}=1$$

nel caso precedente

Osservo che, se $x \longrightarrow z(x) = 1-\cos x$

questa trasformazione (f.ne) è continua

in $x=0$ allora $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(1-\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}$

segue dal Teorema sulla continuità f.ne composta.

Osservo che, in generale, la trasformazione

che mando $x \longrightarrow z(x)$ non è continua

$z=1/x$

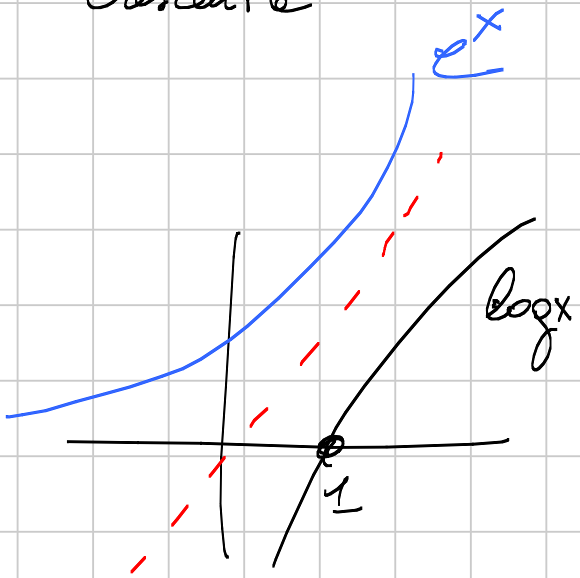
esempio $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$

$z(x)=1/x$ ok

non è continua in $x=+\infty$

$f(x)=e^x$ monot strett. crescente $:\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_e x \; : \;]0,+\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona strett. crescente



$\log(x\cdot y)=\log x+\log y \quad \forall x,y>0$

$\log(1)=0 \qquad (e^0=1)$

$\log x$ è $\begin{cases} >0 & \text{se } x>1 \\ <0 & \text{se } x<1 \end{cases}$

$1+x=e^t$ trasf continua

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\log(e^t)}{e^t-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1$$

$x \longrightarrow t=\log(1+x) \qquad \boxed{x=e^t-1}$

↑ è continua in $\boxed{t=0}$

$x\to 0 \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+\right)$$

$\log x=t \qquad x\longmapsto \log x=t$ questo non è continuo in $t=-\infty$

$x=e^t \qquad x\to 0 \Rightarrow t\to-\infty$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\log x \overset{\Downarrow}{=} \lim_{t\to-\infty} t = \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty\right)$$