Limiti lezione 1

Titolo nota 02/11/2010

Esercizi (difficili) sulla Topologia

1) A è aperto $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, A è intorno di x

2) A_i, $i \in I$, famiglia di aperti $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto

$$\text{Ts } \forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \exists V \in \mathcal{U}_x : \quad V \subset \bigcup_{i \in I} A_i \qquad (\text{Def})$$

$$\text{ma } x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists \bar{\imath} : x \in \underset{\nwarrow \text{aperto}}{A_{\bar{\imath}}} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}_x : x \in V \subseteq A_{\bar{\imath}}$$

$$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}_x : x \in V \subseteq A_{\bar{\imath}} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{Ts}!$$

3) C_i, $i \in I$, " " chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ " chiuso

4) A, B aperti $\Longrightarrow A \cap B$ è aperto

5) C, D chiusi $\Longrightarrow C \cup D$ è chiuso

6) Provare con un controesempio che

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ non è chiuso quando C_n chiuso $\forall n$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ non è aperto " A_n aperto $\forall n$

7) $\mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso

8) $\emptyset$ " " " " "

Nella lezione precedente abbiamo dato un senso alla scrittura. Se

- $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$
- $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto d'accumulazione per A (p.d.a.)
- $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

allora "$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$" significa

"$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \; \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} : \; f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U$"

ovvero "$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \; \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} : [\forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U]$"

"$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \; \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} : \forall x \in A \setminus \{x_0\} \, [x \in V \Rightarrow f(x) \in U]$"

Ma $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, e quindi si hanno 9 casi diversi

$x_0 = \ell = +\infty$ $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in A \; [x > N \Rightarrow f(x) > M]$ "

$U =]M, +\infty[\quad V =]N, +\infty[$

$\forall]M, +\infty[\; \exists]N, +\infty[: \forall x \in A \; [x \in]N, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[]$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{R} \; \forall x \in A \; [x > N \Rightarrow f(x) > M]$.

$x_0\in\mathbb{R}$ $\ell=+\infty$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0 : \forall x\in A\setminus\{x_0\}\ [\,|x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow f(x)>M\,]$

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\ = V$ $\quad]M,+\infty[\ = V$

$\forall]M,+\infty[\ \exists]x_0-\delta,x_0+\delta[\ : \forall x\in A\setminus\{x_0\}\ [\,x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\ \Rightarrow f(x)\in]M,+\infty[\,]$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0 : \forall x\in A\setminus\{x_0\}\ [\,|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M\,]$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0 : \forall x\in A\ [\,0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M\,]$

$x_0=-\infty$ $\ell=+\infty$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{R} : \forall x\in A\ [\,x<N \Rightarrow f(x)>M\,]$

$x_0=+\infty$ $\ell\in\mathbb{R}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}\ \forall x\in A\ [\,x>N \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon\,]$

$x_0\in\mathbb{R}$ $\ell\in\mathbb{R}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A\setminus\{x_0\}\ [\,|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon\,]$

$x_0=-\infty$ $\ell\in\mathbb{R}$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\ \forall x\in A\ [\,x<N \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon\,]$

$x_0=+\infty$ $\ell=-\infty$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{R}\ \forall x\in A\ [\,x>N \Rightarrow f(x)<N\,]$

$x_0\in\mathbb{R}$ $\ell=-\infty$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\ \forall x\in A\setminus\{x_0\}\ [\,|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<M\,]$

$x_0=-\infty$ $\ell=-\infty$ $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{R}\ \forall x\in A\ [\,x<N \Rightarrow f(x)<M\,]$

Teorema Se il limite esiste allora è unico

Def $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $B \subseteq A$

La funzione $g: B \to \mathbb{R}$ così definita

$$\boxed{g(x) = f(x) \quad \forall x \in B}$$

viene detta "restrizione di f a B, e si scrive

$$\boxed{g = f_{|B}}$$

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A. Sia $B \subset A$, e supponiamo x_0 di accu. per B.

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} f_{|B} = l$

La dim. è ovvia:
si tratta solo di prendere

$B \cap$ ---

in luogo di $A \cap$ ---

Limiti da dx e sin
(come particolari restrizioni)

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad$ x_0 p.d.a. per A

Considero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

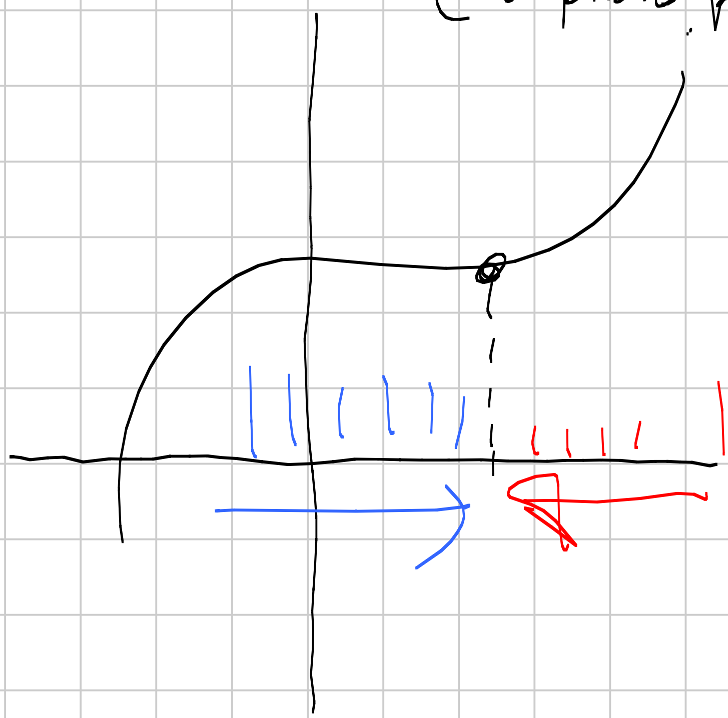
$C = \{x \in \mathbb{R} : x < x_0\}$ $\quad$ $D = \{x \in D : x > x_0\}$

$f|_{C \cap A}$ $\qquad$ $f|_{D \cap A}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ e x_0 p.d.a. per $C \cap A$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

(x_0 p.d.a. per $D \cap A$) $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} {}'' f|_{C \cap A}(x)$

$\left(\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \lim\limits_{x \to x_0} {}'' f|_{D \cap A} \right)$



Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

1) x_0 p.d.a. per $A \cap \{x < x_0\}$
$B \cap \{x \geq x_0\}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

2) a) x_0 p.d.a per $A \cap \{x < x_0\}$
b) " " " $A \cap \{x > x_0\}$
c) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f = d$
d) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = s$
e) $s = d$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = s = d = l$

dim (di 2)

$\exists$ $\forall U \in \mathcal{U}_l \ \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} \quad f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U$

<u>Hp.</u> $\begin{cases} \forall U \in \mathcal{U}_l \ \exists V_1 \in \mathcal{U}^+_{x_0} \quad f(V_1 \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U \\ \forall U \in \mathcal{U}_l \ \exists V_2 \in \mathcal{U}^-_{x_0} \quad f(V_2 \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U \end{cases}$

<u>ma</u> $\forall V \in \mathcal{U}_{x_0}$, posso considerare sempre
$V_1 = V \cap \{x > x_0\}$, $V_2 = V \cap \{x < x_0\}$

$\forall U \in \mathcal{U}_l \ \exists V = V_1 \cup V_2 \cup \{x_0\} \in \mathcal{U}_{x_0} : f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U$ ■

$\exists$ limite restrizione $\Rightarrow \exists$ limite

Oss **Importante** x_0 p.d.a. per A e p.d.a. per $B \subseteq A$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_{|B} = \ell \quad \not\Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} f = \ell$$

__infatti__ prese $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad C=\{x<0\}$ $D=\{x\geq 0\}$

$$f_{|C}(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} f_{|C}(x) = 0 \quad /// \text{ limite restrizione } \exists$$

ma $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \quad \not\exists \quad /// \quad \not\exists$ limite funzione

Def $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f_{|\{x>x_0\}}(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

"Se di $f(x)$ per $x\to x_0$ da destra"

$$\lim_{x\to x_0} f_{|\{x<x_0\}}(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

limite di $f(x)$ per $x\to x_0$ da sinistra

Teoremi algebrici sui limiti

__Teorema__ $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni,

sia x_0 p.d.a. per A.

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = p$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = q \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = p+q$

2) " " $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = p \cdot q$

3) " " " & $g(x) \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = p/q$

purché le scritte $p+q$, $p \cdot q$, p/q abbiamo senso
non siano indet.

__Nota bene__ Nel Teorema preced. non si considerano i casi indeterminati, ovvero

$+\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $0/0$; ∞/∞ .

__Nota bene__ Tutti i casi indeterminati sono tra loro equivalenti

in parole povere

somma di limite = limite somma

prodotto " " = " prodotto

quoziente " " = " quoz.

$\exists \lim_{x \to x_0} f = p \quad \lim_{x \to x_0} g = q \implies \exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = p \cdot q$

dim.

supponiamo $p, q \in \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

Hp $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - p| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - q| < \varepsilon \end{cases}$

Ts $\forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f \cdot g - pq| < \eta$

$$|f(x) \cdot g(x) - p \cdot q| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot q + f(x) \cdot q - p \cdot q|$$

$$= |f(x) \cdot (g(x) - q) + q (f(x) - p)|$$

$$\leq |f(x) \cdot (g(x) - q)| + |q (f(x) - p)|$$

$$= \underset{①}{|f(x)|} \cdot \underset{②}{|g(x) - q|} + \underset{③}{|q|} \cdot \underset{④}{|f(x) - p|}$$

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = p \Rightarrow$ prendo $\varepsilon = 1/4$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$:

$\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ $|x - x_0| < 1/4$ $p - 1/4 < f(x) < p + 1/4$

$\Rightarrow \exists \delta_3 > 0$: $\forall x \in A \cap \{0 < |x - x_0| < \delta_3\}$

$$|f(x)| \leq \max\{|p - 1/4|, |p + 1/4|\}$$

② dalla def. di $\lim_{x \to x_0} g(x) = q$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A \setminus \{x_0\} \; |x - x_0| < \delta_2$

$$|g(x) - q| < \varepsilon$$

③ non devo fare nulla, in quanto $|q| \in [0, +\infty[$

④ dalla def di $\lim_{x \to x_0} f(x) = p$ si ha

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \setminus \{x_0\} \ |x - x_0| < \delta_1$
$$|f(x) - p| < \varepsilon$$

Adesso abbiamo tutti gli ingredienti, e prendendo $x \in A$ t.c.

$$0 < |x - x_0| < \bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

le disuguaglianze ① ② e ④ sono soddisfatte ovvero

$$\underbrace{|f(x)|}_{①} \cdot \underbrace{|g(x) - q|}_{②} + \underbrace{|q|}_{③} \cdot \underbrace{|f(x) - p|}_{④} \le$$

se $|x - x_0| < \bar{\delta}$

$$\underbrace{\max\{|p - 1/4|, |p + 1/4|\} \cdot \varepsilon + |q| \cdot \varepsilon}_{\zeta}$$

$\forall \zeta > 0 \ \exists \bar{\delta} > 0 \ \forall x \in A \setminus \{x_0\} \ |x - x_0| < \bar{\delta} \ |f \cdot g - p \cdot q| < \zeta$