Titolo nota 24/10/2010

ω è radice n-esima di z se

$\omega^n = z$

$\omega = \rho(\cos\phi + i \,\mathrm{sen}\,\phi)$

$z = \beta(\cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta)$

$$\omega^n = z \iff \rho^n(\cos n\phi + i \,\mathrm{sen}\, n\phi) = \beta(\cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = \beta & \text{(in senso "reale")} \\ n\phi = \vartheta + 2k\pi \end{cases}$$

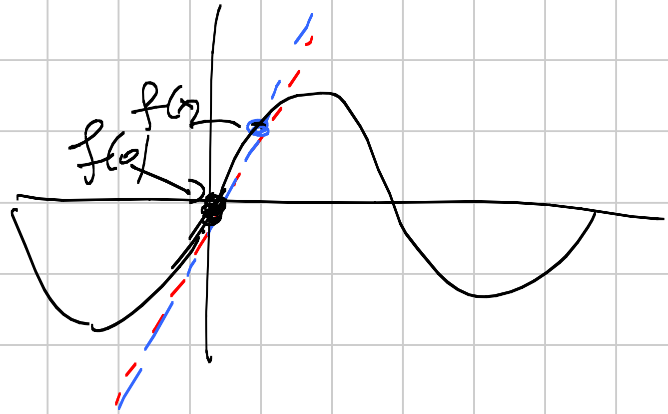
$$\iff \begin{cases} |z| = \beta = \rho^n \\ \phi = \frac{\vartheta}{n} + \boxed{\frac{2\pi}{n} \cdot k} \end{cases}$$

dovendo essere $\phi \in [0, 2\pi[$

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \in [0, 2\pi[$$

$$-\frac{\vartheta}{n} \le \frac{2\pi}{n} \cdot k \le 2\pi - \vartheta/n \iff k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$



$f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen} x - \overbrace{\operatorname{sen} 0}^{= 0}}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\frac{0}{0}$$

Quando x "si avvicina" a 0

? $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ "si avvicina" a qualcosa ?

cosa significa

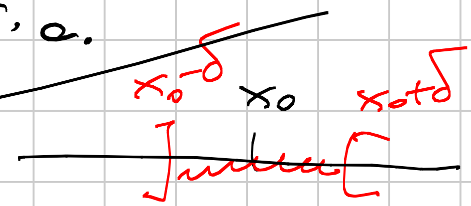
non so se $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to \ell$

Richiami minimali di Topologia

La nozione basilare è quella di intorno

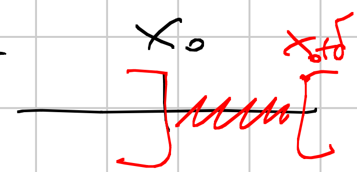
Def Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, diremo che U è un intorno del punto x_0 se $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$x_0 \in \left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[\subseteq U$$

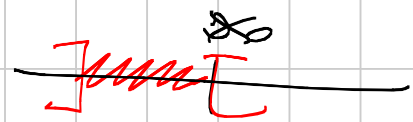


$\mathcal{U}_{x_0}$ = l'insieme di tutti gli intorni di x_0

U^+ intorno destro se $\exists\, \left]x_0, x_0+\delta\right[\subset U^+$



U^- " sinistro se $\exists\, \left]x_0-\delta, x_0\right[\subset U^-$



$+\infty$ $\quad U \in \mathcal{U}_{+\infty}$ $\quad U = \left]a, +\infty\right[\quad \forall a \in \mathbb{R}$

(solo intorni sinistri)

$-\infty$ $\quad V \in \mathcal{U}_{-\infty}$ $\quad V = \left]-\infty, b\right[\quad \forall b \in \mathbb{R}$

Oss Gli intorni di x_0 sono definiti a partire dagli intervalli centrati in x_0

$$\left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[= \{x : |x-x_0| < \delta\} \qquad |\cdot|$$

Esempio Dato $1\in\mathbb{R}$, l'insieme $\overset{0}{]}1-1,\ \overset{2}{1+1}[\ \in \mathcal{U}_1$

" $]3,4[\ \notin \mathcal{U}_1$

Oss: la definizione di intorno dipende da come è stata data la def. di [illegible].

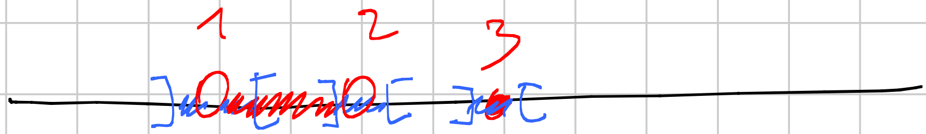
Una volta che si sa cosa è un intorno, tutte le altre def. seguono a ruota

Def Frontiera di $A \equiv \mathcal{F}(A)$

$x_0 \in \mathcal{F}(A)$ se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U\cap A \neq \emptyset$

$U \cap \complement A \neq \emptyset$

Esempio $A =]1,2[\ \cup \{3\}$



$\mathcal{F}(A) = \{1,2,3\}$

$\forall\,]1-\delta, 1+\delta[\ = U \qquad 1-\frac{\delta}{2} \in U\cap\complement A,\quad \overset{(*)}{1+\frac{\delta}{2}\in U\cap A}$

$\forall\,]2-\delta, 2+\delta[\ = V \qquad \overset{(**)}{2+\frac{\delta}{2}} \in V\cap\complement A,\quad \overset{(***)}{2-\frac{\delta}{2}}\in V\cap A$

$\forall\,]3-\delta, 3+\delta[\ = W \qquad \overset{(****)}{3-\frac{\delta}{2}} \in W\cap\complement A,\quad 3\in W\cap A$

Note (*) purché $\delta < 2$ (se ≥ 2, si prende $3/2$)

(**) " " " (" , si prende $5/2$)

(***) " " (" , " " $3/2$)

(****) " " (" , " " $5/2$)

Def Chiusura di $A \overset{\text{Def}}{\equiv} A \cup \mathcal{J}(A) = \overline{A}$

Esempio $A =]1,2[\cup \{3\}$

$\mathcal{J}(A) = \{1, 2, 3\}$

$\overline{A} = A \cup \mathcal{J}(A) = [1,2] \cup \{3\}$

Def Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se $C \equiv \overline{C}$

Esempio

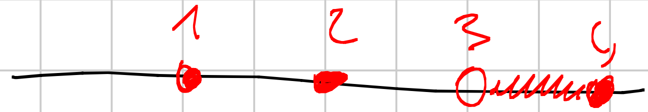
$A =]1,2[\cup \{3\}$ non è chiuso

mentre $\overline{A} = [1,2] \cup \{3\}$ è chiuso

Def Interno di $A \overset{\text{Def}}{\equiv} A \setminus \mathcal{F}(A) = \overset{\circ}{A}$

Esempio $A = \{1,2\} \cup \,]3,4]$

$\mathcal{F}(A) = \{1,2,3,4\}$



$\overline{A} = \{1,2\} \cup [3,4]$

$\overset{\circ}{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) = \,]3,4[$

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "aperto" se $A \equiv \overset{\circ}{A}$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$

A è chiuso se $\complement A$ è aperto

dim

$\boxed{///}$ non è provata

A chiuso $\Longleftrightarrow \mathcal{F}(A) \subset A \Longleftrightarrow \mathcal{F}(\complement A) = \mathcal{F}(A) \subset A$ e dunque

$\complement A$ è aperto $\Longleftrightarrow \mathcal{F}(\complement A) \cap \complement A = \emptyset$ $\boxed{///}$

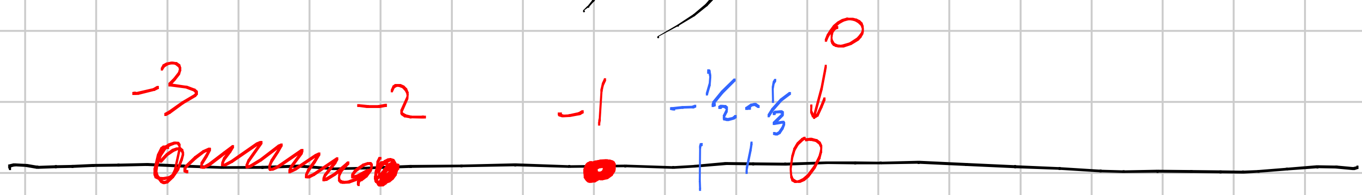
Oss $\mathcal{F}(\complement A) = \mathcal{F}(A)$ è ovvia

$x_0 \in \mathcal{F}(A)$ se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U \cap \complement A \neq \emptyset$
$\quad U \cap A \neq \emptyset$

$x_0 \in \mathcal{F}(\complement A)$ se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U \cap A \neq \emptyset$
$\quad U \cap \complement A \neq 0$

Esempio Sia $A =]-3,-2] \cup \{-1\} \cup \{-1/n : n \geq 1\}$

determinare $\partial(A)$, $\mathring{A}$, $\bar{A}$



$$\mathcal{F}(A) = \{-3, -2, -1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \dots, -\tfrac{1}{n}, \dots 0\}$$

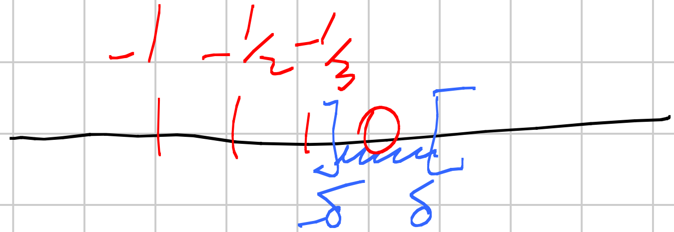
$$= \{-3, -2\} \cup \{-\tfrac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{0\}$$

Dim $0 \in \mathcal{F}(A)$ $\qquad$ osservo che $0 \notin A$
quindi $0 \in \complement A$

prendo $]-\delta, \delta[= U$

① $0 \in U \cap \complement A$

② $\exists \bar{x} \in U \cap A$?



Sì, infatti $\forall \delta > 0$ $\exists n > 0$: $1/n < \delta$ ma $1/n \in A$!

Dunque si ottiene

$$A =]-3,-2] \cup \left\{-\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$$

$$\mathcal{F}(A) = \{-3,-2\} \cup \left\{-\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

$$\mathring{A} = A \setminus \mathcal{F}(A) =]-3,-2[$$

$$\overline{A} = A \cup \mathcal{F}(A) = [-3,-2] \cup \left\{-\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

$\blacksquare$

Per calcolare i limiti, si deve sapere cosa sia

Def $x_0 \in A$ si dice "punto isolato" per A

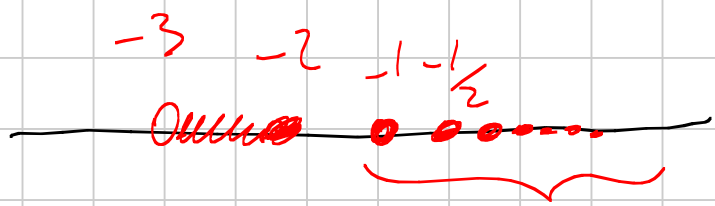
se $\left(\exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \text{ t.c. } U \cap A = \{x_0\} \right)$

$\forall V \in \mathcal{U}_{x_0} \quad V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Esempio $A =]-3,-2] \cup \{-1/n : n \geq 1\}$

I punti isolati di A sono i seguenti

$$\left\{-1/n : n \geq 1\right\}$$



Ora vediamo i punti che non sono isolati per l'insieme

Def Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice "di accumulazione" per A se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0} \quad (U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Esempio $A =]-3,-2] \cup \{-1/n : n \geq 1\}$

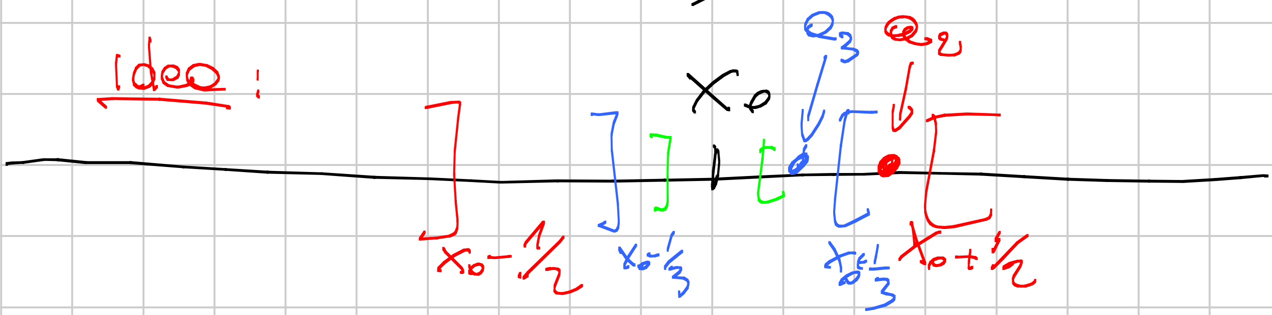
i punti di accumulazione di A

$$D(A) = [-3,-2] \cup \{0\}$$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$, sia x_0 punto di accumulazione per A

Allora $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$, $\# U \cap A = \infty$

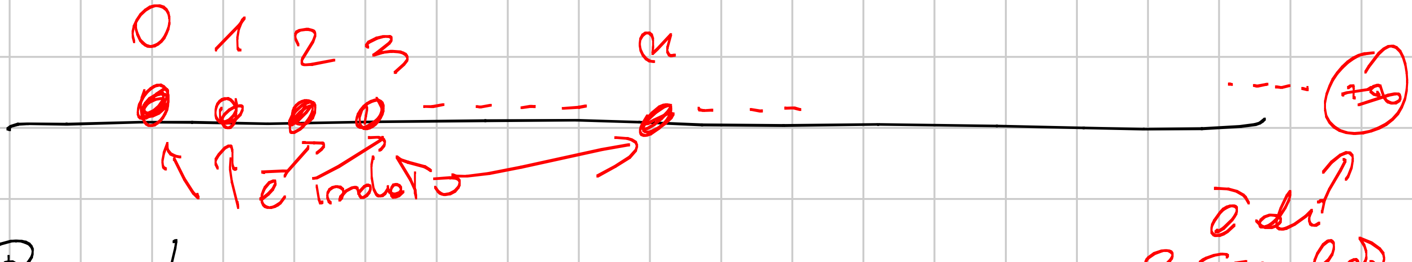
Idea:



Domanda Se $\# A < +\infty$ allora possono esistere punti di accumulazione per A?

No! Se $A = \{x_0, \dots, x_n\}$, $n < +\infty$ allora $x_0, \dots, x_n$ sono TUTTI punti isolati

Domanda $\mathbb{N}$ ha punti di accumulazione?



Ricordo $\{1/n : n \geq 1\}$ 0 è di acc.

Teorema $+\infty$ è punto d'accumulazione per $\mathbb{N}$

dim.

$+\infty$ è di accumulazione per $\mathbb{N}$

infatti, preso un V intorno di $+\infty$
$]a, +\infty[$

si ha che $\exists\, n : n > a$ (Principio Archi.)

e dunque $\mathbb{N} \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$

" " $+\infty$ è di acc. ∎

Esempio Sia $A = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \geq 1 \right\} \cup]-3, -1[\cup \{5\}$

Determinare i suoi punti isolati
i " " di accumulazione

In $\mathbb{R}^2$ si procede in modo analogo con

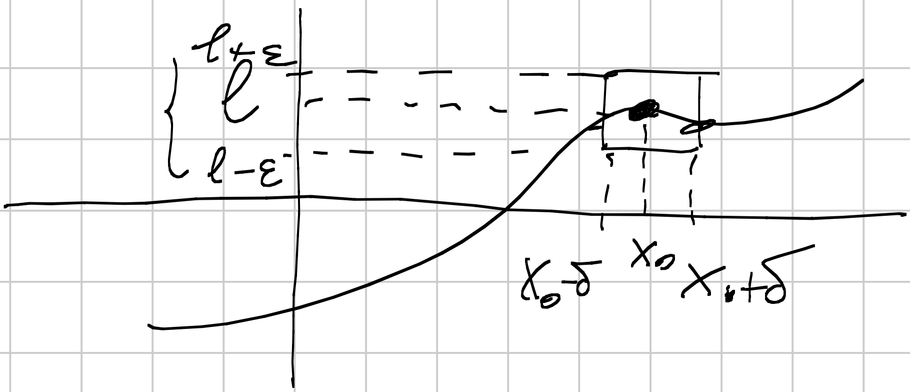
la sola avvertenza che U intorno di x_0

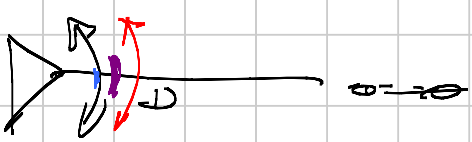
se $\exists\, B(x_0, r) =: \{x : d(x, x_0) < r\}$

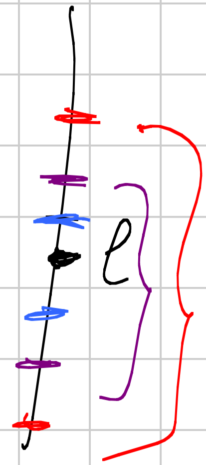
t.c. $x_0 \in B(x_0, r) \subset U$ ....

→ limiti di funzioni

→ limiti di successioni







<u>Def</u> (limite per $x \to x_0$)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia <u>x_0 punto di accumulazione</u> <u>per</u> A. Diciamo che " $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ <u>se</u>

"limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a ℓ"

$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \ \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} \quad f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subset U$

$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \ \exists V \in \mathcal{U}_{x_0} : \ \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in U$

<u>Oss</u> ① x_0 deve essere di accumulazione per A

(2) x_0 di accumulazione per A
NON È DETTO che stia in A
non è detto che esiste $f(x_0)$

(3) Il concetto di limite è legato ad un concetto di approx.

Teorema Se il limite esiste allora è unico

dim

x assurdo (1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\quad l_1 \neq l_2$

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

$]l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon[$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : f(]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\cap A \setminus \{x_0\}$ $\quad f(x) \in]l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon[$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad |f(x) - l_1| < \varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad |f(x) - l_2| < \varepsilon$

Se prendo $\bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_1 \wedge \delta_2$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \begin{cases} |f(x) - l_1| < \varepsilon \\ |f(x) - l_2| < \varepsilon \end{cases}$

ma $0 < |l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)|$

$\leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$

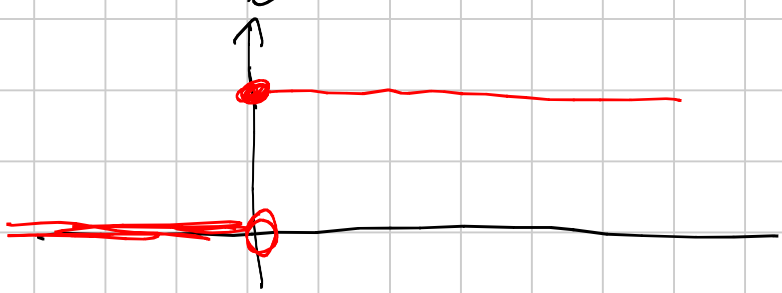
$|x - x_0| < \delta$

$= |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon$

$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon$ Assurdo

Esempio Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ Allora

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$



x def $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$

$0 < |x - 0| < \delta \quad |f(x) - l| < \varepsilon$

Oss la def di limite

NON CI PERMETTE di individuare

il limite medesimo

Vi permette di verificare che

un certo valore è limite

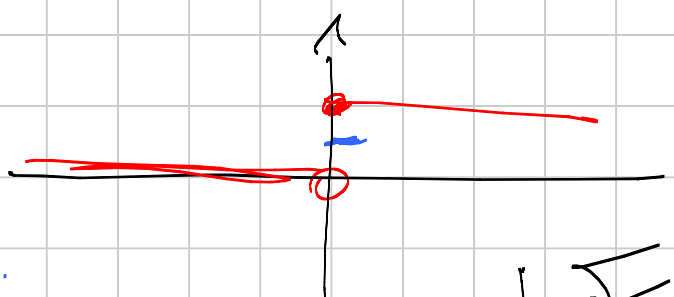
$|f(x)| \le 1 \Rightarrow \quad l \in [0,1]$ <u>necessaria</u>

$\exists \quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

infatti, se preso $l \in [0,1]$ il limite esistesse

allora

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \quad 0<|x|<\delta \quad |f(x)-l|<\varepsilon$$



$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \begin{cases} -\delta<x<0 & l-f(x)<\varepsilon \\ 0<x<\delta & f(x)-l<\varepsilon \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \quad \begin{matrix} -\delta<x<0 & l<\varepsilon \\ 0<x<\delta & 1-l<\varepsilon \end{matrix}$$

ASSURDO $\blacksquare$

$\ell = 1/3 \quad \frac{1}{4} = \varepsilon < 1/3 \qquad 1/3 < 1/4$ Ass

$l = 0 \qquad \varepsilon = 1/4 \qquad \begin{cases} 0 < 1/4 \\ \text{ma } 1 - 0 = 1 < 1/4 \end{cases}$ Ass

Esempio $f(x) = 1$

$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$