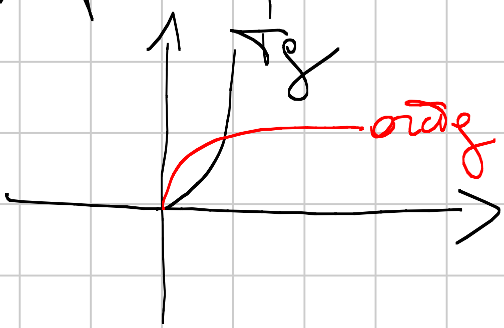
Note Title 26/10/2010

Dato $z = x + iy$, avendo posto $\theta = \arg\min z$ l'equazione $Tg\,\theta = y/x$ si risolve

$$\theta = \arg\min z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x & x > 0 \quad y \geq 0 \\ \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x & x < 0 \quad y \geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x & x < 0 \quad y < 0 \\ 3/2\,\pi & x = 0 \quad y < 0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg} y/x & x > 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

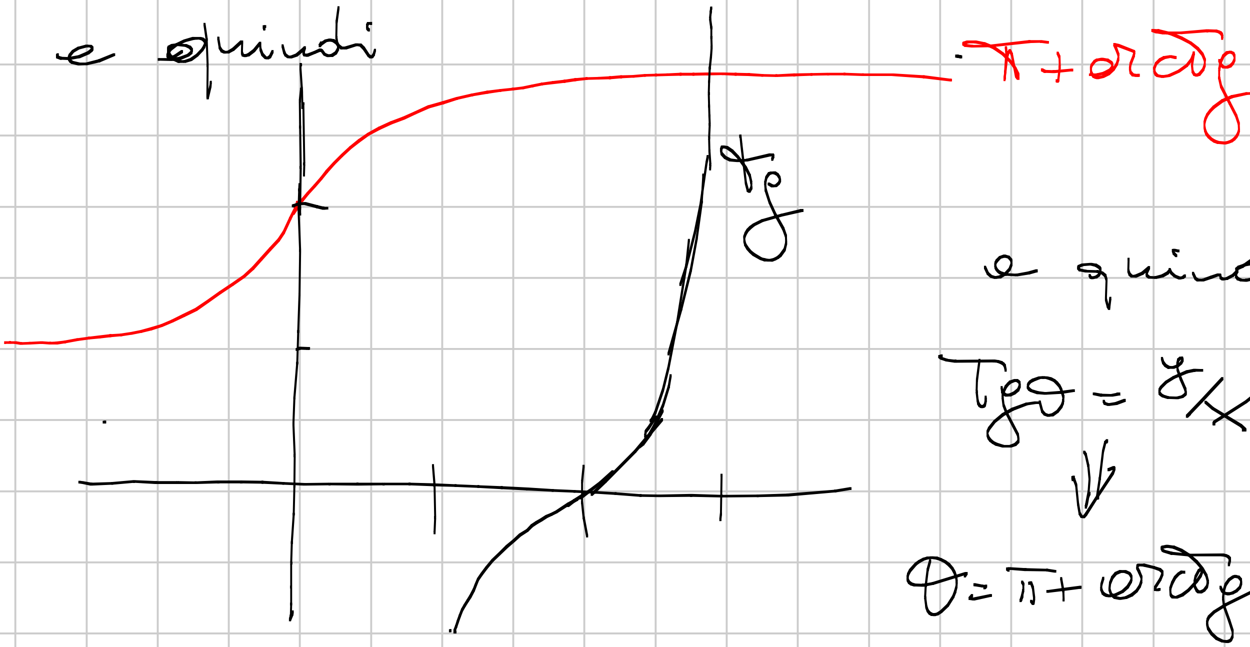
Infatti quando $x, y \in$ 1° quadrante




$$Tg\,\theta = y/x$$
$$\Updownarrow$$
$$\theta = \operatorname{arctg} y/x$$

Quando $x<0$ si ha $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

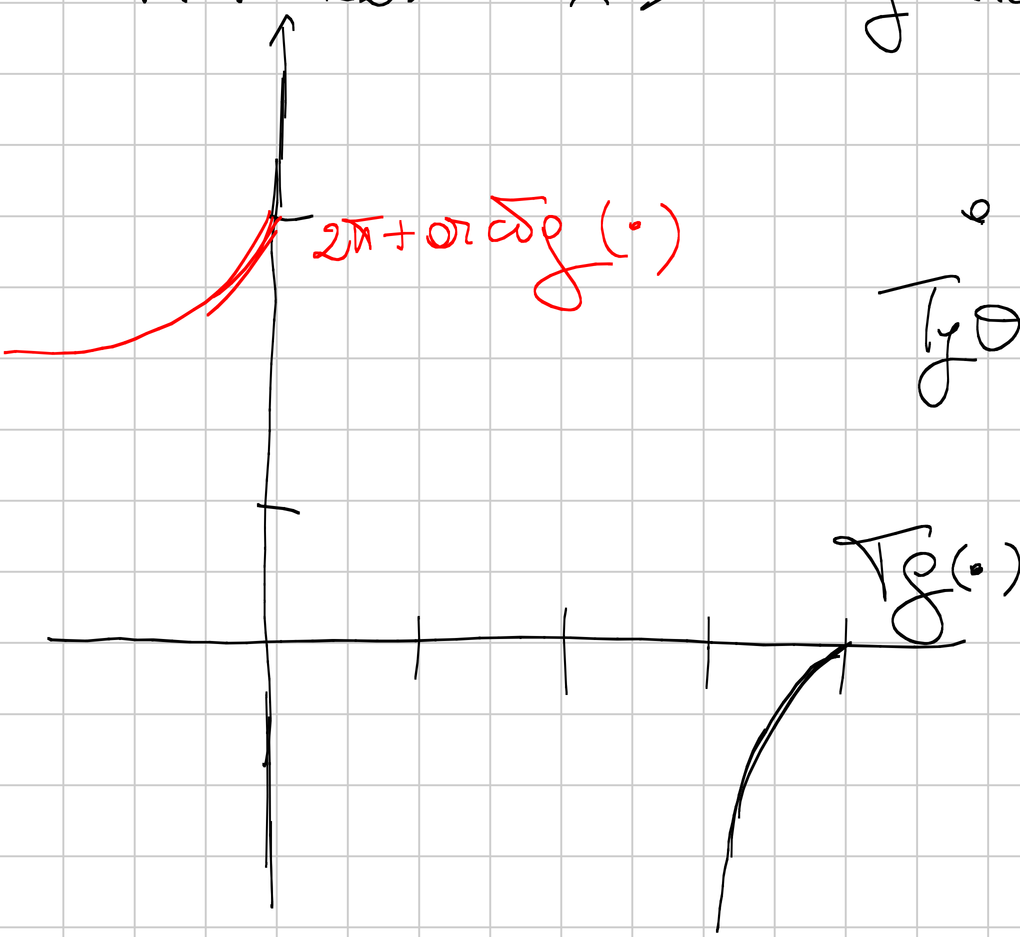
e quindi




e quindi

$$\operatorname{Tg}\theta = y/x$$
$$\Downarrow$$
$$\theta = \pi + \operatorname{arctg} y/x$$

Nel caso $x>0$ e $y<0$




e dunque

$$\operatorname{Tg}\theta = y/x$$
$$\Downarrow$$
$$\theta = 2\pi + \operatorname{arctg} y/x$$

<u>Teorema</u> 1) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

2) $|z+w| \le |z|+|w| \quad$ "

3) $|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

1) Per provare l'uguaglianza si fa una verifica diretta $\quad z = a+ib \quad w = c+id$

$$z\cdot w = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

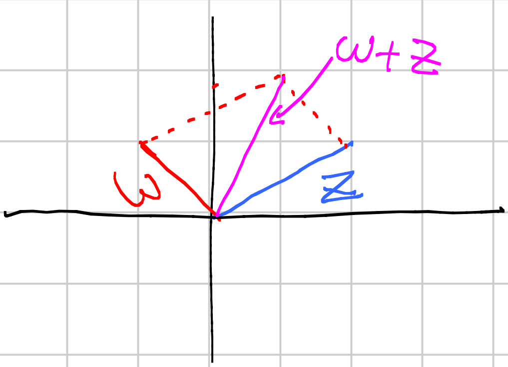
da cui segue

$$|z|\cdot|w| = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

mentre

$$|z\cdot w| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \dots$$

2) Questa è la disuguaglianza triangolare




dunque $|z|$, $|w|$ e $|w+z|$ sono le lunghezze dei 3 lati di un triangolo

da cui segue che

$$|z+w| \le |z|+|w|$$

3) È la 2), ma per un triangolo rettangolo


e perciò

$$|z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|$$

# Formula (di De Moivre)

Se $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \in \mathbb{C}$

allora, $\forall n \geq 1$ si ha

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta)\right)$$

dim

Si fa per induzione su $n$

$n=0$ $\quad 1 = z^0 \stackrel{?}{=} \rho^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \rho^0 = 1$

$n=1$ $\quad \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) = z^1 \stackrel{?}{=} \rho^1(\cos\vartheta \cdot 1 + i \operatorname{sen}\vartheta \cdot 1)$

$n=2$ $\quad \left[\rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)\right]^2 = z^2 \stackrel{?}{=} \rho^2(\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta)$

$\rho^2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta + 2i \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) =$

$\rho^2(\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta)$

$n=3$ $\quad z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\vartheta + i \operatorname{sen} 2\vartheta) \cdot \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$

$= \rho^3(\cos 2\vartheta \cos\vartheta - \operatorname{sen} 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta +$

$i(\cos 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen} 2\vartheta \cos\vartheta))$

$= \rho^3(\cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta)$

ed ora il passaggio da $n$ a $n+1$ si fa in modo perfettamente analogo. $\blacksquare$

<u>Esercizio</u> Calcolare $z^{60}$, dove $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

dim

si tratta di passare alla forma polare $z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ (4° quadrante)

e quindi $|z| = 2$

$$\vartheta = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}$$

$$= 2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$|z| = 2\left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{3}\pi\right)$$

$$|z|^{60} = 2^{60}\left(\cos \frac{300}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{300}{3}\pi\right)$$

$$\overset{!}{=} 2^{60}$$

**Def** $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$ si dice "radice n-esima del n.ro complesso $w$" se $z^n = w$

**Teorema** $\forall n \geq 1$, esistono $n$ radici n-esime $\neq$ del numero complesso $z = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \in \mathbb{C}$ e sono

$$\{w_k : k = 0 \dots n-1\} = \left\{ |z|^{1/n} \left( \cos\left(\frac{\phi}{n} + i \frac{2\pi}{n} k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{n} + i \frac{2\pi}{n} k\right)\right) : k = 0 \dots n-1 \right\}$$

**dim**

1) Se $u, v$ son radici n-esime di $z$ allora $|u| = |v| = \sqrt[n]{|z|}$

segue dalla def, in quanto $u^n = v^n = z$

2) Se $z = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ allora $w = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\phi}{n}\right)$ è radice n-esima di $z$

anche qui si fa una verifica diretta

è radice n-esima di $z$

2) Se $u=\rho(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$ e $v=\rho(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)$ sono

radici n-esime di $z$ con $\theta,\varphi\in[0,2\pi[$

allora esiste $k\in\{0,\dots,n-1\}$ t.c.

$$\theta=\varphi+k\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$$u^n=\rho^n(\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta)=\rho^n(\cos n\varphi+i\,\text{sen}\,n\varphi)$$

$$\Leftrightarrow\ n\theta=n\varphi+2k\pi\ ,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\ \theta=\varphi+k\frac{2\pi}{n}\quad ''\quad k\in\mathbb{Z}$$

ma questo dice che esiste $\overbrace{k\in\{0,1,\dots,n-1\}}^{\text{se prendo } k \text{ più grande, esco da } [0,2\pi[}$ t.c.

$$\theta=\varphi+k\frac{2\pi}{n}\ \text{con } \theta \text{ e } \varphi\in[0,2\pi[$$

è radice $n$-esima di $z$

2) Se $u = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ e $v = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ sono

radici $n$-esime di $z$ con $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi[$

allora esiste $k \in \{0, \dots, n-1\}$ t.c.

$$\vartheta = \varphi + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$u^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta) = \rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

$\iff n\vartheta = n\varphi + 2k\pi$ , con $k \in \mathbb{Z}$

$\iff \vartheta = \varphi + k \dfrac{2\pi}{n}$ $\quad$ " $\quad k \in \mathbb{Z}$

ma questo dice che esiste $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ t.c.

$\vartheta = \varphi + \dots$ con $\vartheta$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$ $\blacksquare$

<u>Esercizio</u> Calcolare $\sqrt[4]{1 - i\sqrt{3}}$

Esercizio Calcolare $\sqrt[3]{1}$

" $\sqrt[4]{-1}$

" $\sqrt[6]{i}$