Complessi

Note Title 21/10/2010

<u>Oss</u> $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\exists\, M = \max A$

allora $M = \sup A$

Il viceversa non è vero in generale

<u>Esempio</u> $\{1 - 1/n \;:\; n \geq 1\} = A$

$\sup A = 1 \notin A \quad \nexists \max A$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \iff \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

<u>Def</u>

Un insieme A ha "cardinalità n"

<u>se</u> $\exists\, \varphi : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow A$

corrispondenza biunivoca

$\boxed{\# A = n}$

<u>Oss</u> dato A, se esiste $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$

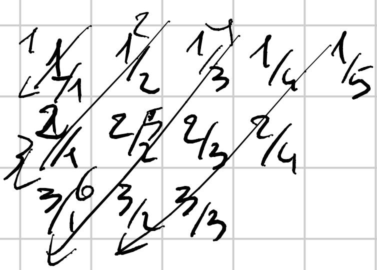
corrispondenza biunivoca

allora
A è numerabile

<u>Esempio</u> $\mathbb{P}=\{2k : k\in\mathbb{N}\}$ è numerabile

$$\varphi : k \longrightarrow 2k$$

<u>Esempio</u> $\mathbb{Q}$ è numerabile



<u>Oss</u> $\mathbb{R}$ <u>NON</u> $\underline{\underline{è}}$ numerabile ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ non è numer.)

$$365 = 3\cdot10^2+6\cdot10^1+5\cdot10^0$$

$$1,245 = 1\cdot10^0+2\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}$$

$q\in\mathbb{Q} \Rightarrow q$ ha allineamento decimale finito
o
q " " " periodico

$p = q\cdot m + r$ $\qquad 7/9$

Teorema $\mathbb{R}$ non è numerabile

dim
(Cantor) per assurdo lo sia

$$x_0 = \alpha_0^0, \alpha_1^0 \alpha_2^0 \alpha_3^0 \dots$$
$$x_1 = \alpha_0^1, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{N}$$
$$x_2 = \alpha_0^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots$$

$\dots$

non c'è

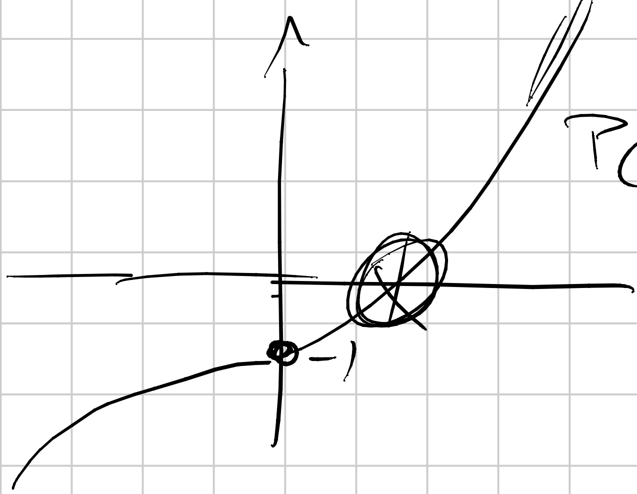
$$\bar{x} = \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots$$

$$\bar{x} \quad \bar{\alpha}_0 = \begin{cases} 1 & \alpha_0^0 > 5 \\ 7 & \alpha_0^0 \le 5 \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{cases} 1 & \alpha_0^1 > 5 \\ 7 & \alpha_0^1 \le 5 \end{cases}$$

I complessi nascono dalle ricerche fatte da **Cardano** e **Tartaglia** culminate nella scoperta della formula risolutiva delle equazioni di 3° grado, cioè

$$z^3+pz+q=0 \qquad \cancel{z^2=-1}$$



$$P(x)=x^3+2x-1$$

$$P'=3x^2+2$$

$P'=0$ non ha sol. reali

$$P''=6x$$

Queste equazioni, come si vedrà ammettono SEMPRE una radice reale (le uniche radici che interessavano a Cardano); la cosa sorprendente è che la formula, per ricavarle, passava attraverso le radici di numeri negativi (!!! e queste non avevamo alcun senso per Cardano!)

Teorema (Fondamentale dell'algebra)

Sia $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

un polinomio di grado n.

Allora $P(z)=0$ ammette almeno 1 radice

in $\mathbb{C}$

Oss se $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0)=0$ allora

dividendo per $(z-z_0)$ si trova $P_1(z)$

t.c. $P(z) = (z-z_0) \cdot P_1(z)$

ed ora $P_1(z)=0 \rightarrow \exists z_1$ radice

Oss Quante soluzioni ha l'equazione

$$z^3 - 1 = 0 \quad ??$$

In $\mathbb{R}$ ne trovo 1, $z_0 = 1$

" $\mathbb{C}$ ne trovo 3

$\mathbb{C} := \{a+ib \ : \ a,b \in \mathbb{R}\}$

$z = a+ib$ è detto in "forma algebrica"

$a = \mathrm{Re}\, z \equiv$ parte reale di z

$b \equiv \mathrm{Im}\, z \equiv$ " immaginaria di z

$i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ poiché $i^2 = -1$

= unità immaginaria

$$(a+ib)+(c+id) \underset{\text{Def}}{:=} (a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) \underset{\text{Def}}{:=} (ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot c + a\cdot(id) + (ib)\cdot c + \underline{(ib)\cdot(id)}$$

$$= ac + i^2 bd + i(ad+bc)$$

$$= (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$+$ è associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro 0, esiste l'opposto

$$(1+2i) + (-1-2i) = 0$$

$\cdot$ è associativa, commutativa, esiste l'elemento neutro 1, esiste l'inverso per gli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$(1+2i)\cdot \frac{1}{1+2i} = 1$$

non è un numero complesso in forma algebrica

$$\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1+4+i(-2+2)} = \frac{1-2i}{5}$$

$$= \frac{1}{5} - i\,\frac{2}{5}$$

$$(1+2i)\cdot\left(\frac{1}{5}-i\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+i\left(-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)$$
$$=1$$

Probleme: il numero $\frac{3+2i}{4-i}\in\mathbb{C}$?
(ZOZ.)

$$\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i}=\frac{12-2+i(3+8)}{16-i^2+i(4-4)}=\frac{10}{17}+i\frac{11}{17}$$

- modulo di z $\longrightarrow$

$z\in\mathbb{C}$ $\qquad |z| \equiv$ modulo di z

$$\equiv\sqrt{a^2+b^2}$$

$a=\mathrm{Re}\,z \qquad b=\mathrm{Im}\,z$

Esempio $\quad z=1+i\cdot 1 \qquad |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$z=3-4i \qquad |z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

Oss importante $\qquad z=a+ib$

si ha che $\quad |z|=\sqrt{(a+ib)\cdot(a-ib)}$

$$=\sqrt{a^2+b^2}$$

verifica $\quad i^2=-1$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - i\cancel{ab} + i\cancel{ba} - i^2b^2$$
$$= a^2+b^2$$

- coniugato di z $\longrightarrow$

<u>Def</u> $z\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$, si dice coniugato di z e si indica con $\bar z$ il numero complesso

$$\bar z = a-ib$$

<u>Oss</u> $z\cdot\bar z = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$
$$= |z|^2$$

$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ infatti $z\in\mathbb{R}$ <u>sse</u> $\mathrm{Im}\, z = 0$

<u>sse</u> $z=\bar z$

<u>sse</u> $z=\mathrm{Re}\, z$

- parte reale e immaginaria di $z \longrightarrow$

- EQUAZIONI 1° grado in $\mathbb{C}$ $\longrightarrow$

Esempio $4z + 3i = 2 - 3\bar{z}$ $\left(\Leftrightarrow \begin{cases} \_ \\ \_ \end{cases} \right)$

$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$

$4(a+ib) + 3i = 2 - 3(a - ib)$

$4a + i4b + 3i - 2 + 3a - i3b = 0$

$(7a - 2) + i(b+3) = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 7a - 2 = 0 \\ b + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 2/7 \\ b = -3 \end{matrix}$

$$\boxed{z = \frac{2}{7} - 3i}$$

Oss $\mathrm{Re}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

sono lineari rispetto alla somma

Om $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ Esercizio $z = a+ib$
$w = c+id$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z = a + ib \longrightarrow \overline{z} = a - ib \longrightarrow \overline{\overline{z}} = a + ib$$

$$|z\,\omega| \overset{?}{=} |\omega| \cdot |z| \quad \text{Sí}$$

$z = a + ib$ $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\omega = c + id$ $\quad |\omega| = \sqrt{c^2 + d^2}$

$$z \cdot \omega \longrightarrow |z \cdot \omega|$$

Teorema

1) $|z| = |\bar{z}|$ (analogo ad $\mathbb{R}$ $|x| = |-x|$)

modulo in $\mathbb{R}$

2) $\left| \operatorname{Re} z \right| \leq |z|$ ← modulo in $\mathbb{C}$

3) $\left| \operatorname{Im} z \right| \leq |z|$

4) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ← già fatto

1) $z = a + ib \longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\bar{z} = a - ib \longrightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$

2) e 3) seguono dal fatto che $z = a + ib$

$\operatorname{Re} z = a \quad \operatorname{Im} z = b$

Val. assoluto

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad |\operatorname{Re} z| = |a| \qquad |\operatorname{Im} z| = |b|$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \max\{|a|, |b|\}$$

Esercizio

eq. ~~a~~ coeff. NON reali

Risolvere l'equazione $z^2 + iz - 6 = 0$ in $\mathbb{C}$

dim

$$z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 + 24}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{23}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{23}}{2} - \frac{i}{2} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{23}}{2} - \frac{i}{2}$$

le radici sono complesse ma non sono coniugate tra loro

Ma questa equazione NON è a coefficienti reali

Teorema

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $\boxed{a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}}$

$$P(z) = 0 \text{ allora } P(\bar{z}) = 0$$

dim

$$P(z) = 0 \iff a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

$\Rightarrow \quad \overline{(a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0)} = 0$ coniugato di somma

$\Leftrightarrow \quad \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$ somma " coniug.

$\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \dots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = 0$ coniug. prodotto " prodotto coniug.

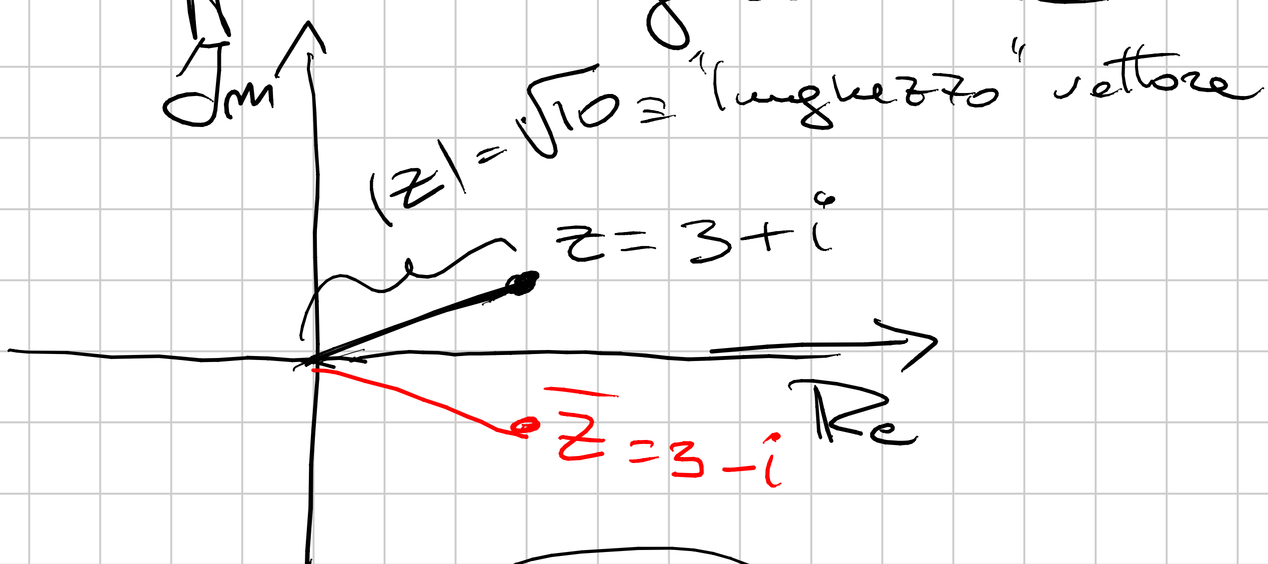
$\Leftrightarrow \quad \overline{a_n} \cdot (\overline{z})^n + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0$

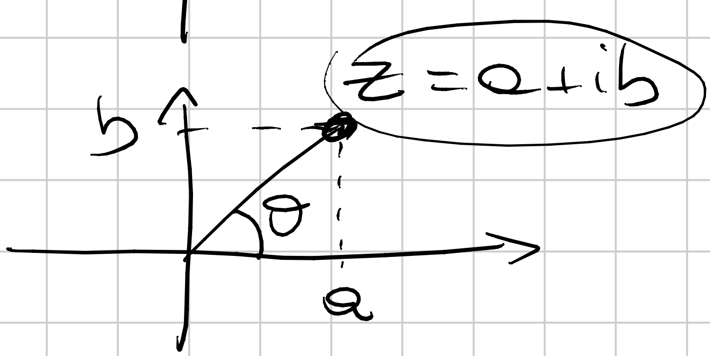
$a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0 \dots n$

$\Leftrightarrow \quad a_n \cdot (\overline{z})^n + \dots + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0$

$\Leftrightarrow \quad P(\overline{z}) = 0$

Rappresentazione geometrica



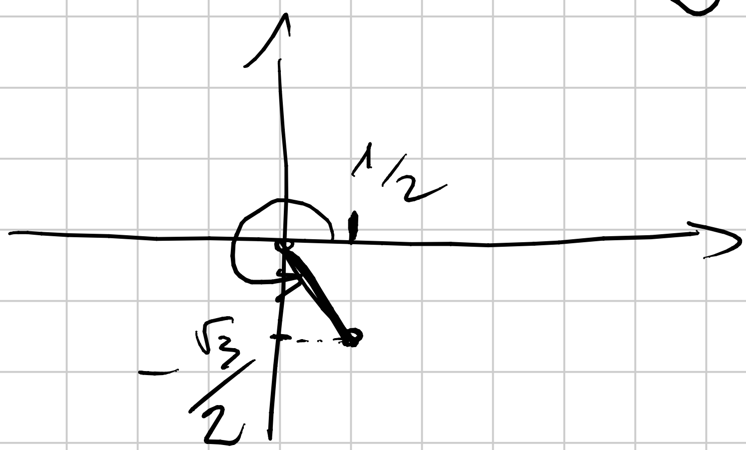


$a = |z| \cdot \cos\theta \qquad b = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$

$|z| = \rho$

$0 \neq (a+ib) \longleftrightarrow (\rho, \theta)$

Esempio $\quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$



$\rho = |z| = 1$

$\frac{1}{2} = \cos\theta$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}\theta$

$\theta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$

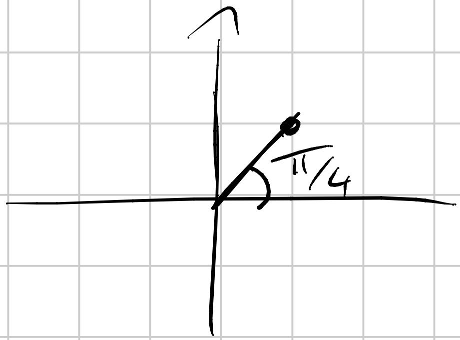
$\theta = -\frac{\pi}{3}$

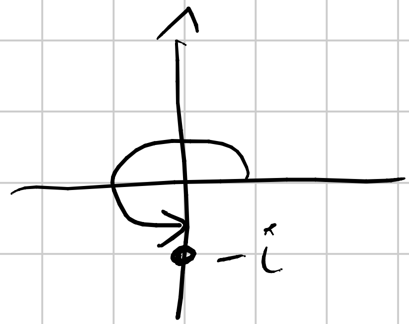
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i = \cos\left(\frac{5}{3}\pi + 10\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi + 10\pi\right)$

$\mathrm{argmin}\ z \in [0, 2\pi[$

$\mathrm{argmin}(1+i) = \pi/4$

$\mathrm{argmin}(-i) = \frac{3}{2}\pi$





$z = x + iy$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\ (+2k\pi) & x>0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\ (+2k\pi) & x<0 \\ \dfrac{\pi}{2}\ (+2k\pi) & x=0,\ y>0 \\ \dfrac{3}{2}\pi\ (+2k\pi) & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

Forma trigonometrica (polare) di z : $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$\Downarrow$

$z = a + ib \qquad \rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$a = \rho\cos\theta \qquad b = \rho\operatorname{sen}\theta$

<u>Oss</u> $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$

$\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$

<u>Oss</u> $z \cdot \omega$: interpretazione

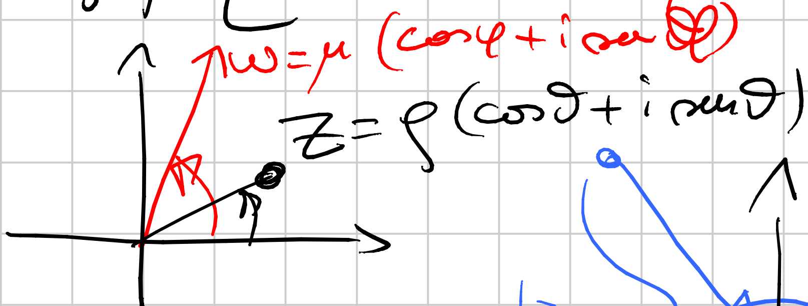
$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

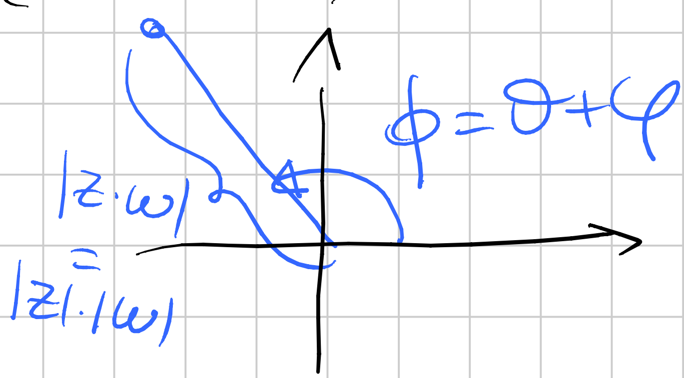
$\omega = \mu(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$

$$z \cdot w = \rho \cdot \mu \left(\cos\theta \cdot \cos\varphi + i \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi + i \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi + i^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi \right)$$

$$= \rho \cdot \mu \left[\left(\underbrace{\cos\theta \cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi} \right) + i \left(\underbrace{\mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi + \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi} \right) \right]$$

$$= \rho \cdot \mu \left[\cos(\theta + \varphi) + i \,\mathrm{sen}\,(\theta + \varphi) \right]$$





Teorema

1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

2) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ "

3) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$