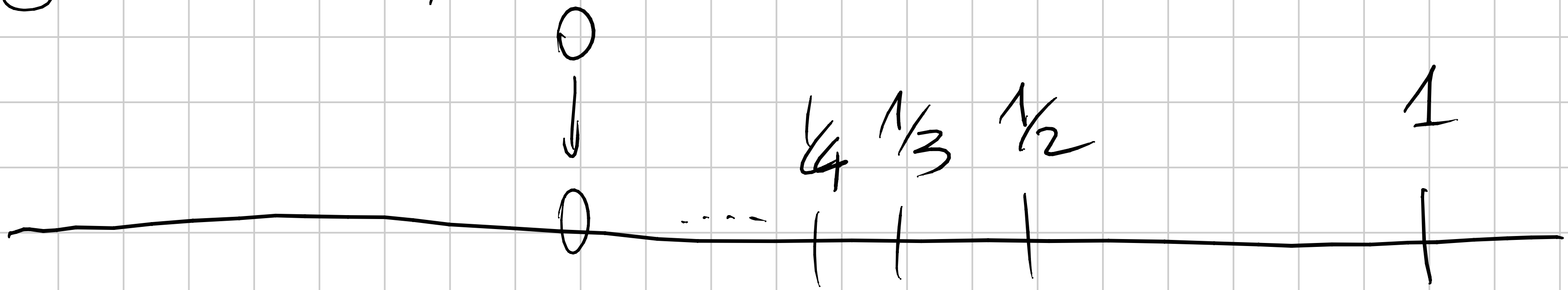
Problema: esiste $\min\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$?

La risposta è no, anche se 0 deve giocare qualche ruolo ....



- osservo che $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$
- però $0 = \frac{1}{n}$ è equaz. impossibile.

quando $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

ovvero $0 \notin A$

$\nexists$ ~~$\exists$~~ min A

~~per~~ assurdo $\exists\ \bar{x} \in A$ con $\bar{x} = \min A$

~~se~~ se $\bar{x} \in A$ allora $\bar{x} = 1/\bar{n}$ per un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$

~~o~~ ovvero $\frac{1}{\bar{n}} = \min A$ ma questo è assurdo

In quanto $\frac{1}{n+1} \in A$ e $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

Visto che $\mathbb{R}$ è un insieme ordinato,
ha senso definire i maggioranti (minoranti)

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Un numero $m \in \mathbb{R}$
tale che $a \leq m$ $\forall a \in A$ si dice
maggiorante di A

Oss nel caso precedente $A = \{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \}$
0 è un minorante di A

Il concetto di max in $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ estr. sup.

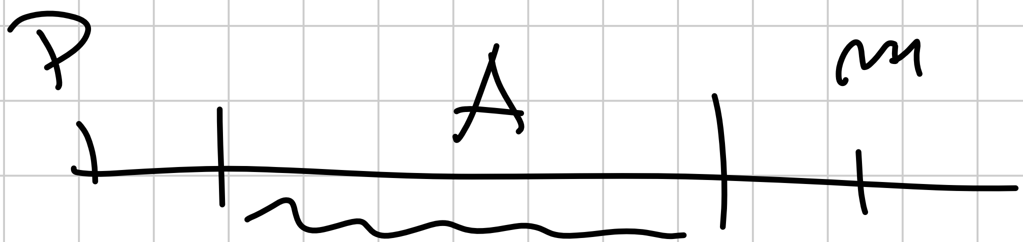
" " " min " $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ " inf.

<u>Def</u> $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad m \in \mathbb{R}$ si dice

"maggiorante" di A se $\quad a \leq m \ \forall a \in A$

p si dice "minorante" di A se

$p \leq a \ \forall a \in A$



Indichiamo l'insieme dei maggioranti di A con

$\mathcal{M}_A = \{ m \in \mathbb{R} \, ; \, a \leq m \; \forall a \in A \}$ maggioranti

$m_A = \{ p \in \mathbb{R} \, ; \, p \leq a \; \forall a \in A \}$ minoranti di A

Oss : $\mathcal{M}_A = \phi$? A è illimitato superiormente

Oss : $\mathcal{M}_\phi = \mathbb{R}$ dim x assurdo

xass. supponiamo che $\bar{x} \in \mathbb{R}$ $\bar{x} \notin \mathcal{M}_\phi$

allora $\exists a \in \phi : \bar{x} < a$ Assurdo

$\Rightarrow \forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad \bar{x} \in \mathcal{M}_\phi$

Def: $A \neq \emptyset$ si dice "estremo superiore di A" il numero $\Lambda = \min \mathcal{M}_A$

e si dice $\boxed{\Lambda = \sup A}$

Oss $\mathcal{M}_A = \emptyset \Rightarrow \sup A \overset{?}{=} +\infty$

Oss $A = \emptyset \Rightarrow \sup \emptyset \overset{?}{=} -\infty$

Minoranti di A $\quad m_A$

Def

Estremo inferiore di A un numero $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

$(\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$

t.c. $\lambda = \max(m_A)$

Oss $\quad \lambda = \max m_A = \inf A$

$\Lambda = \min M_A = \sup A$

Oss

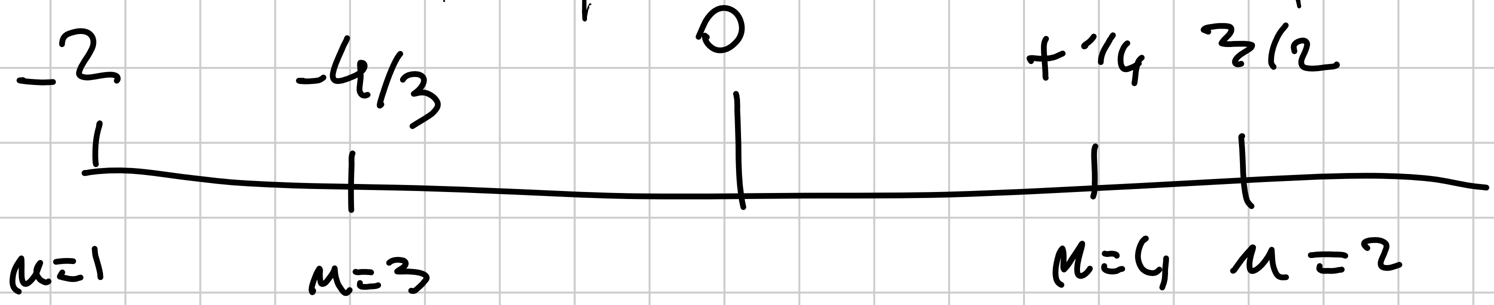
$\inf \emptyset = +\infty$

Esempio $A = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

determinare $\inf A$ $\sup A$.

→ Non abbiamo "ricette" per trovare

→ Abbiamo la def. per testare α, dato un valore Λ, questo è l'estremo superiore



$(-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right) \searrow$ e va a $+1$

$(-1)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) \nearrow$ " " " -1

$\mathcal{M}_A =]-\infty, -2]$ $\mathcal{M}^A = [3/2, +\infty[$

$\inf A = -2 = \min A$ $\sup A = 3/2 = \max A$

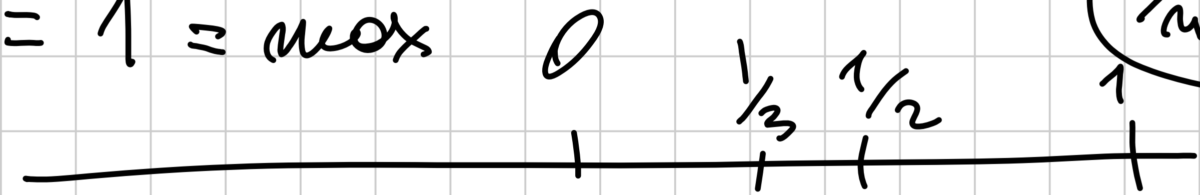
$\left(1+\frac{1}{2k}\right) > 1+\frac{1}{2k+2} \quad \forall x \geq 1$ verif x ind.

$$\left(-\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) < -\left(1+\frac{1}{2k+3}\right) \quad \forall k \geq 1 \quad ,, \right) \checkmark$$

Esempio $\quad A = \left\{ \frac{1}{n} \quad n \geq 1 \right\}$

$$\boxed{\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}}$$

$\sup A = 1 = \max$



$\inf A = 0 \notin A$

$$\lambda = \inf A \iff \begin{cases} \lambda \leq a \quad \forall a \in A \quad (\text{deve essere minorante}) \\ \forall p \in m_A \quad p \leq \lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \le a \quad \forall a \in A \\ \forall q > \lambda \quad \exists \bar{a} \in A \quad \bar{a} < q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \le a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \bar{a} < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

$\exists$ $0 = \inf A$

- $0 \le 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$? $\underline{\text{Sì}}$
- $\boxed{\text{preso } 0 + \varepsilon = \varepsilon, \text{ esiste } \bar{n} \in \mathbb{N} : \ 1/\bar{n} < \varepsilon}$

Si utilizza il principio di Archimede (vedi dopo) preso $\varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : 1 < \bar{n}\varepsilon$? ST

$a = \varepsilon \quad b = 1 \implies \exists\, \bar{n} : \bar{n} \cdot \varepsilon > 1$ $

per il principio di
Archimede

$\Lambda = \sup A$ <u>se</u> $\begin{cases} \Lambda \in \mathcal{M}_A \\ \forall m < \Lambda, \ m \notin \mathcal{M}_A \end{cases}$

<u>se</u> $\begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq \Lambda \\ \forall m < \Lambda, \ \exists \bar{a} \in A \quad m < \bar{a} \end{cases}$

<u>se</u> $\begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq \Lambda \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{a}_\varepsilon \in A \quad \Lambda - \varepsilon < \bar{a}_\varepsilon \end{cases}$

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$

se $\exists\ M = \max A$ allora $M = \sup A$

dim

$$M = \max A \Longrightarrow M \in A \cap \mathcal{M}_A$$

$$M = \max A \Longrightarrow \forall m < M,\ m \notin \mathcal{M}_A \qquad \blacksquare$$

Oss $\Lambda = \sup A \not\Longrightarrow \Lambda = \max A$

Esempio $A = \{ 1 - 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$ $\quad 1 = \sup A$ ma $1 \notin A$

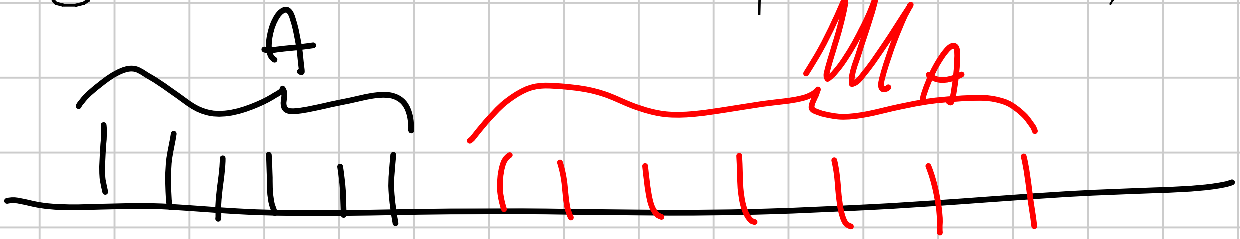
Problema: per quali A esiste $\sup A$?

Teorema: $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \\ \mathcal{M}_A \neq \emptyset \end{array}\right. \Longrightarrow \exists\, \Lambda = \sup A$$

dim

Segue dall'assioma completezza, infatti A e $\mathcal{M}_A$



sono così posizionati

$\forall a \in A \quad \forall b \in \mathcal{M}_A \quad a \leq b \implies$ (per l'assioma completezza)

$\exists c \in \mathbb{R} : a \underset{①}{\leq} c \underset{②}{\leq} m \quad \forall a \in A \; \forall m \in \mathcal{M}_A$

① $\implies c \in \mathcal{M}_A$

② $\implies c = \min \mathcal{M}_A$

$$\Downarrow$$

$c = \sup A = \min \mathcal{M}_A \quad \boxtimes$

Osservazioni: $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset \Rightarrow \inf A \le \sup A$

$$\emptyset \neq A \subseteq B \Rightarrow \inf B \underset{1}{\le} \inf A \le \sup A \underset{2}{\le} \sup B$$

Esempio $A =]0,1]$ $\qquad \inf A = 0 < \sup A = 1 = \max A$

Esempio $A =]0,1] \subseteq]-1, 3[= B$

$$m_A =]-\infty, 0] \supseteq]-\infty, -1] = m_B$$

$$0 = \max m_A \ge \max m_B = -1$$

① $A \subseteq B \implies m_A \supseteq m_B \implies \max m_A \geq \max m_B$

$\implies \inf A \geq \inf B$

② $A \subseteq B \implies M_A \supseteq M_B \implies \min M_A \leq \min M_B$

$\implies \sup A \leq \sup B$

Inoltre, se $A \neq \emptyset$ allora $m_A \cap M_A = \emptyset$ e inoltre

$\forall p \in m_A \quad \forall q \in M_A \quad p \leq q \implies \max m_A \leq \min M_A$

$\implies \inf A \leq \sup A$ $\boxtimes$

Data $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\Lambda = \sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \leq \Lambda & \forall \omega \in f(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\omega} \in f(A) : \Lambda - \varepsilon < \bar{\omega} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq \Lambda & \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A : \Lambda - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

Analogamente $\lambda = \inf_A f = \inf f(A)$

$$\iff \begin{cases} \lambda \leq \omega \quad \forall \omega \in f(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega_\varepsilon \in f(A) \qquad \omega_\varepsilon < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \leq f(x) \quad \forall x \in f(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in A \quad : \quad f(x_\varepsilon) < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

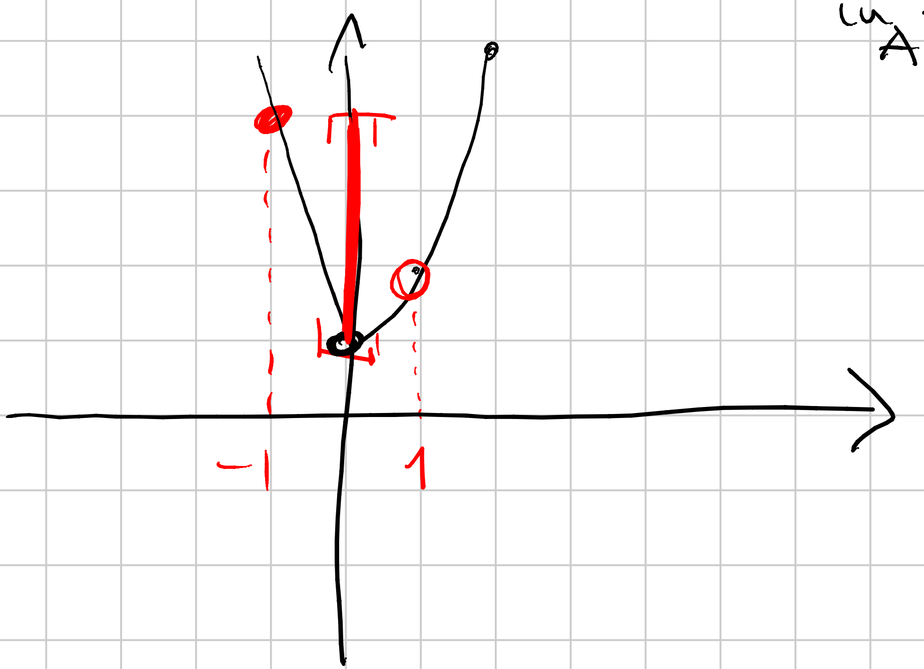
Esempio

Sia data $f(x) = \begin{cases} 1-3x & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ $A = [-1, 1[$

$\Rightarrow f(A) = [1, 4]$

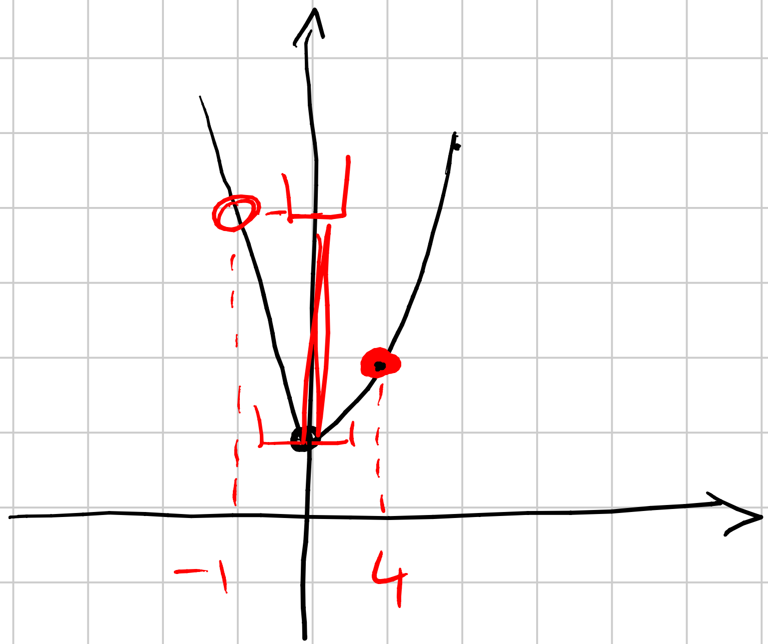
$\sup_A f = 4 \in f(A)$ "max f"

$\inf_A f = 1 = \min_A f$



Se si prende $B =]-1, 1]$

$$f(B) = [1, 4[$$



$$\sup f(B) = 4 \notin f(B)$$

$$\inf f(B) = 1 = \max f(B)$$ poiché $\underset{\overset{\shortparallel}{f(0)}}{1} \in f(B)$

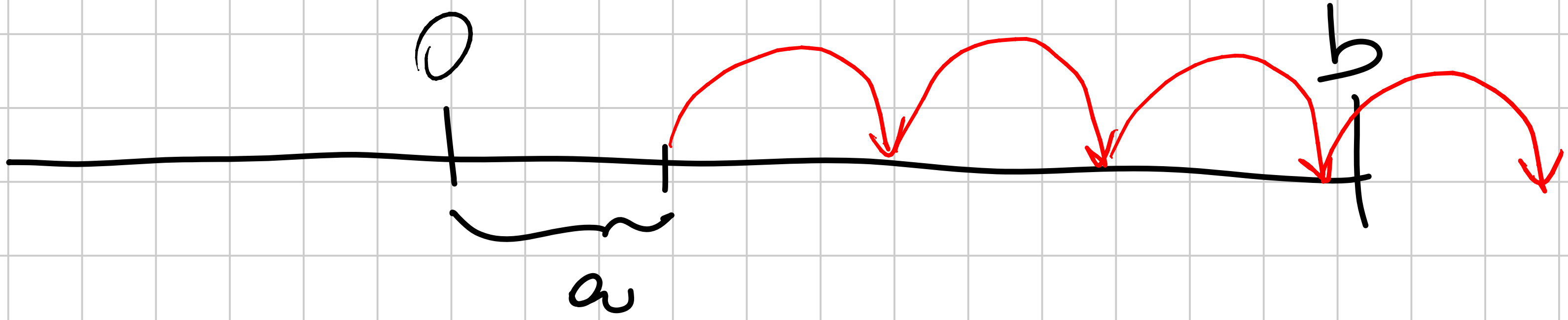
Proprietà di Archimede

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\bar{n} a > b$$

dim

Sia $A = \{ n a : n \in \mathbb{N} \}$ $\nexists$ $\sup A = +\infty$



Supp. $\exists\ \Lambda = \sup A < +\infty$

$$\Rightarrow \Lambda - a \notin M_A \Rightarrow \exists\ \bar{n}a \in]\Lambda - a, \Lambda]$$

per definizione di estremo superiore

ovvero

$$\Lambda - a < \bar{n}a \leq \Lambda$$

da cui $(\Lambda - a) + a < \bar{n}a + a$

cioè $\Lambda < (\bar{n}+1)a \in A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$

Assurdo. Ne segue che $\sup A = +\infty$

e quindi $\exists\ \bar{n} : \bar{n}a > b$ ▨

Teorema

1) $X > 0 \implies \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad 1/n < X$

2) $X \in \mathbb{R} : \quad X < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \implies X \leq 0$

dim

1) $X = a \quad 1 = b \xRightarrow{\text{P.A.}} \exists\, n : \quad n \cdot x > 1$

2) $[\mathcal{A} \implies \mathcal{B}] \iff [\text{non } \mathcal{B} \implies \text{non } \mathcal{A}]$

$\mathcal{A} = \{x > 0\} \implies \mathcal{B} = \{\exists\, n \in \mathbb{N} ; \; 1/n < x\}$

non $A = \{x \le 0\} \not\Leftarrow$ non $B = \{\forall n \in \mathbb{N} \quad x < \frac{1}{n}\}$

Esercizi

(1) Determinare inf A e sup A, ove $A = \left\{(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

si osserva che

$n = 2, 4, 6 \dots \quad \left(\frac{1}{4} - 1\right) < \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) < \dots < \frac{1}{4}$

$n = 1, 3 \dots \quad \left(2 - \frac{1}{4}\right) > \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) > \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) > \dots - \frac{1}{4}$

ovvero $\quad m_A = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right] \qquad M_A = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$

ovvero $\quad \inf A = -\frac{3}{4} \qquad \sup A = \frac{3}{4}$

(2) Determinare inf A e sup A $\quad A = \left\{ \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

$n = 0 \to \frac{3+1}{2} = 2$

$1 \longrightarrow \frac{3-1}{4} = 1/2$

$2 \longrightarrow \frac{3+1}{8} = 1/2$

$3 \longrightarrow \frac{3-1}{16} = 1/8$

$4 \longrightarrow \frac{3+1}{32} = 1/8$

$5 \longrightarrow \frac{3-1}{64} = 1/32$

$6 \longrightarrow \frac{3+1}{128} = 1/32$

.....

$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

$\boxed{\inf_n a_n = 0}$ Va provato!

(3) " " " " $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}$

- $n < n+1 \rightarrow 2^n < 2^{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} \cdots \longrightarrow 0$
- $m < m+1 \rightarrow 3^m < 3^{m+1} \longrightarrow \frac{1}{3^m} > \frac{1}{3^{m+1}} \cdots \longrightarrow 0$
- $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} > 0 \quad \forall m, n$

$\nexists\ 0 = \inf A \qquad 0 \in m_A)$

x as 0 non sia il max m_A allora

$\exists\ \varepsilon > 0 \ : \ \varepsilon = \max m_A$

allora $\varepsilon < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \quad \forall n, m$

allora $\varepsilon < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad \frac{2}{2^n} > \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$

allora $\varepsilon < \frac{2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora $\varepsilon < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

allora $\log_2 \varepsilon < 1-n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora $\log_2 1/\varepsilon > n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

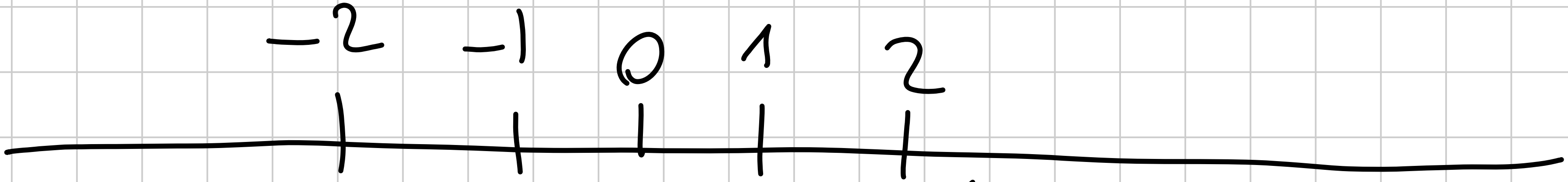
ma per il P.A.

si ha che $\exists\, \bar{n} : (\bar{n}-1)\cdot 1 > \log_2 1/\varepsilon$

$\sup A = 2 = \max A \qquad 2 \in \mathcal{M}_A \quad \left(\begin{matrix}\text{ovvio}\\ 2\in A\end{matrix}\right)$

Def. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice "denso" (in $\mathbb{R}$) se $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; \exists a \in A : a \in \,]x, y[$ (ovvero $x < a < y$)

Oss $\mathbb{Z}$ non è denso in $\mathbb{R}$



se prendo $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$ $\nexists q \in \mathbb{Z} : q \in \,]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$

Teorema $\boxed{\mathbb{Q} \text{ è denso in } \mathbb{R}}$

dim

Conseguenza $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, q_1 \in \mathbb{Q} \;:\; q_1 \in \,]x-\varepsilon, x[$

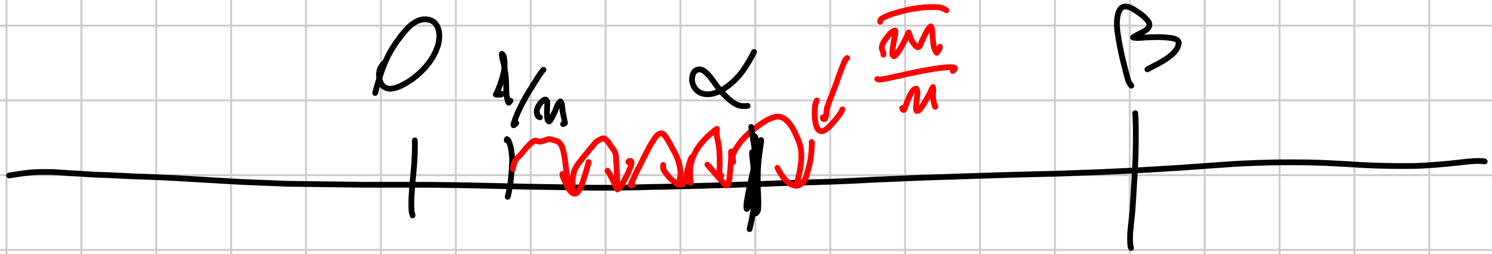
$\qquad\qquad\quad q_2 \qquad\qquad\quad q_2 \in \,]x, x+\varepsilon[$

$|q_1 - x| < \varepsilon \quad |q_2 - x| < \varepsilon$

Ci si limita ai soli intervalli limitati $]\alpha,\beta[$

Th $\boxed{\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad \exists\, q\in\mathbb{Q} : \alpha<q<\beta}$

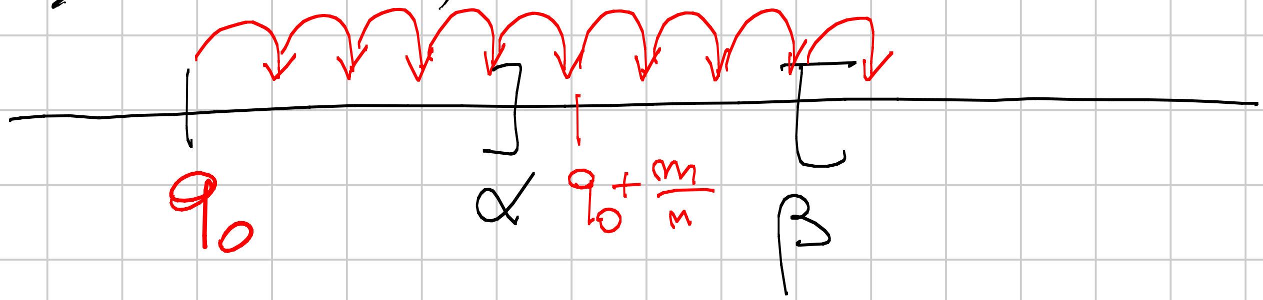
- Se $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, allora è ovvio!!
- almeno uno dei due (α o β) è irrazionale



Non è restrittivo $\alpha,\beta > 0$

Osserviamo che $\inf \mathbb{Q} = -\infty$ $\sup \mathbb{Q} = +\infty$

$\Rightarrow$ preso α, $\exists\, q_0 < \alpha$ con $q_0 \in \mathbb{Q}$



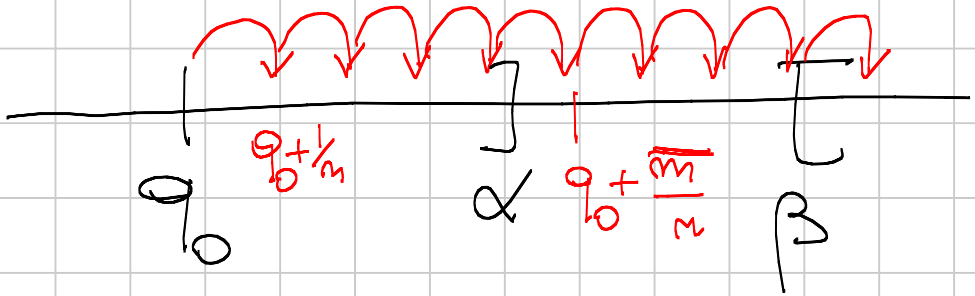
Adesso consideriamo $\beta - \alpha = d = |\beta - \alpha|$

e prendiamo n : $1/n < d = \beta - \alpha$ (che esiste, in quanto $d > 0$!)

Adesso ci muoviamo con passi di lunghezza $1/n$

Per Archimede, deve $\exists\, m \in \mathbb{N}$:

$$q_0 + m \cdot \frac{1}{n} > \alpha$$



Adesso abbiamo superato α, ma non sappiamo se siamo "dentro" $]\alpha, \beta[$ (potremmo avere oltrepassato anche β ....)

A tal fine si considera

$$\Omega = \{ m \in \mathbb{N} : q_0 + \frac{m}{n} > \alpha \} \subseteq \mathbb{N}$$

Essendo $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ vale il principio del minimo intero e dunque $\exists\, \overline{m} = \min \Omega$, ovvero

$$q_0 + \frac{(\overline{m}-1)}{n} < \alpha < \underbrace{\left(q_0 + \frac{\overline{m}-1}{n}\right) + \frac{1}{n}}_{q_0 + \overline{m}/n} < \beta \left(= \alpha + d\right)$$

e dunque la Tesi, essendo

$$q_0 + \frac{\overline{m}}{n} \in \left]\alpha, \beta\right[\qquad \blacksquare$$

<u>Esercizio</u>: l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

<u>Oss</u> $\#\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} >>> \#\mathbb{Q}$

<u>dim</u>

$\mathcal{T}$ dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\alpha < z < \beta$

Per la densità di $\mathbb{Q}$, $\exists \gamma \in \mathbb{Q}$: $\alpha/\sqrt{2} < \gamma < \beta/\sqrt{2}$

ovvero $\exists \gamma \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $\alpha < \gamma\sqrt{2} < \beta$

Def Un insieme A si dice numerabile se esiste una biiezione $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{N}$

Esempio L'insieme dei numeri pari è

numerabile

<u>Esempio</u> $\mathbb{Q}$ è numerabile

Allineamenti decimali

<u>Teorema</u> $\forall q \in \mathbb{Q}$, si ha che una delle

due seguenti eventualità

- $q = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n$ e $\alpha_m = 0 \ \forall m > n$

- $q = \alpha_0, \overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ ovvero q è periodico

Oss $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff x$ ha un allineamento decimale illimitato e <u>non</u> periodico

Teorema $\mathbb{R}$ <u>non</u> è numerabile