Note Title 10/17/2010

Relazioni di ordine.

Def Dato un insieme A, si prende $A \times A$

Un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ è detta

"Relazione di ordine parziale su A"

se

1) $(x, x) \in \mathcal{R} \quad \forall x \in A$ — Riflessiva ($x \le x$)

Antisimmetrica 2) $(x, y) \in \mathcal{R}$ & $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A$ ($x \le y$, $y \le x$)

Transitiva 3) $(x, y) \in \mathcal{R}$ & $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R} \quad \forall x, y, z \in A$

Questa relazione di ordine R viene detta

"Relazione di ordine totale su A"

se valgono 1), 2), 3) e

i) $\forall x, y \in A \quad (x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$

Esempio Su $\mathbb{N}$ la relazione "$\leq$" è una relazione di ordine totale

Controesempio Preso l'insieme delle

parti di A $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

La relazione " $\subseteq$ " è di ordine

parziale ma non totale

Oss Avere un ordine è essenziale

per definire $\min A$ $\max A$

Oss A e si prende $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$$\left(\mathbb{P}(A), \subseteq\right)$$

$\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

$A = \{1,2,3\}$ $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\forall B \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq B$!! Ok

$\forall B, C \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq C \ \& \ C \subseteq B \Rightarrow B = C$!! Ok

$\forall B, C, D \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq C \subseteq D \Rightarrow B \subseteq D$!! Ok

ma $\quad \{1\} \not\subseteq \{2\} \quad \{2\} \not\subseteq \{1\}$

$\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

Insieme numeri naturali $\mathbb{N}$

<u>Def</u> Esiste un insieme $\mathbb{N}$ e una applicazione $\boxed{\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}}$ $\sigma(n) = n+1$ "successore"

1) $0 \in \mathbb{N}$ l'insieme è non vuoto

2) $m \neq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sigma(m) \neq \sigma(n)$ Iniettività σ

3) $0 \neq \sigma(0)$ per avere ∞ elt.

4) Se $S \subseteq \mathbb{N}$ t.c. • $0 \in S$ (base ind.) $\Longrightarrow S = \mathbb{N}$

• $\{0,1,\dots,n\} \subseteq S \Rightarrow \underbrace{\sigma(n)}_{n+1} \in S$

Principio di induzione

Principio Buon Ordinam.

Teorema (Teorema minimo intero)

$A \subseteq \mathbb{N} \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, \bar{m} = \min A$

dim

Se $0 \in A$ allora $\exists\, \bar{m} = 0 = \min A$

Se $0 \notin A$, allora $\boxed{0 \in \mathbb{N} \setminus A}$

Ora se $\{0, \dots, m\} \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$?

① $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ $\implies \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$

$\{0, \dots m\} \in \mathbb{N} \setminus A \implies m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

significa che $A = \emptyset$ <u>Assurdo</u>

(2) $n+1 \in A$ & $n \in \mathbb{N} \setminus A$

allora $n+1 = \bar{n} = \min A$ $\boxed{}$

dim

Si consideri $\mathbb{N} \setminus A$

- $\mathbb{N} \setminus A \ni 0$: altrimenti $0 = \min A$!!
- $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ e $n \in \mathbb{N} \setminus A \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

(se così non fosse, $n+1 \in A$ e perciò $n+1 = \min A$)

Ma per il P.I. si ha $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ Assurdo ∎

Proviamo che

__Teorema__ Se $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ $\exists \min A$ allora vale Principio Induzione

dim

Supponendo $A \subseteq \mathbb{N}$: $0 \in A$.
Se $\{0, 1, \dots, n\} \in A$ allora $(n+1) \in A$

Tesi $A = \mathbb{N}$

Tesi eq $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$

__Xass__ $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min(\mathbb{N} \setminus A) = m$, con $m \neq 0$ $(0 \in A \text{ x Hip})$

Ma allora $\exists n \in A$ t.c. $n+1 = m$ (il predecessore)

Ma per ipotesi se $n \in A \Rightarrow n+1 = m \in A$ assurdo $(m \in \mathbb{N} \setminus A)$

Quindi $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$ è assurdo $\Longrightarrow A = \mathbb{N}$

Principio di induzione (2ª forma)

Se $S \subseteq \mathbb{N}$ è tale che

- $\boxed{\overline{n}} \in S$ (base induzione)
- $\{\overline{n}, \dots, n\} \in S \Rightarrow n+1 \in S$

$\Longrightarrow S = \{\overline{n}, \overline{n}+1, \dots\}$

Def $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \overline{n}$ è definito (x induzione) come
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Esercizio

$$0+1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 0$$

dim

Verifico che vale per $n=0$

$$0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad \checkmark$$

Suppongo valga $0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vale per n)

devo provare che vale per $n+1$

cioè

$$\exists \quad 0+1+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

ma

$$\underbrace{0+1+\dots+n}+n+1 \overset{\text{Hip. Ind.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Vale per $n=0$ (o $n=\bar{n}$)

Suppongo valga per n (generico)

dimostro vale per $n+1$

Proviamo a "ricavare" (non dimostrare) il perché

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+\dots+200 = S$$

$$200+199+\dots+0 = S$$

$$\underbrace{200+200+\dots+200}_{\substack{\parallel \\ 200\cdot(200+1)}} = 2S$$

$$0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somma progressioni geometriche

IMPORTANTISSIMO

(ricavare)

Calcolare $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

dove $q \in \mathbb{R}$

dim

$$S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n}$$

$$\underline{q S_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + q^3 + \dots + \cancel{q^n} + q^{n+1}}$$

$$S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \Longrightarrow q \neq 1 \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Quando $q = 1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1} = n+1$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{se } q \neq 1 \end{cases}} \quad (*) \quad \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$$

Dimostriamo, per induzione, la formula $(*)$

$n=0 \qquad S_0 = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \quad \checkmark = \begin{cases} 0+1=1 & q=1 \\ \dfrac{1-\cancel{q}}{\cancel{1-q}} \;1, & q\neq 1 \end{cases}$

$n=1$ (non serve per la dim!!)

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} q^k = q^0 + q^1 = 1+q \overset{\checkmark}{=} \begin{cases} 1+1 & q=1 \\ \dfrac{1-q^2}{1-q} = 1+q & q \neq 1 \end{cases}$$

Hp. induttive
$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{\text{Hp}}{=} \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}}$$

$$\text{Ts} \quad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k \overset{\text{Ts}}{=} \begin{cases} n+2 & q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$q = 1 \qquad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 1^k = n+2$

$q \neq 1 \qquad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{} + q^{n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

Applico ipotesi induttive $\longrightarrow$ $= \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}}{1-q} \qquad \overline{\delta} \qquad \overline{///}$$

Teorema $f: A \to A$ una funzione ed $a \in A$

le formule
$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f(g(n)) \end{cases}$$

definisce una funzione $g: \mathbb{N} \to A$ $\exists!$

dim

Verifichiamo che il $\boxed{CE(g) = \mathbb{N}}$. Sia $S = CE(g)$

•) $0 \in S$. •) Se $\{0, \dots, n\} \in S$, allora si può calcolare

$g(n) \in A \implies$ posso calcolare $f(g(n)) = g(n+1) \implies (n+1) \in S$

$g(1)\, g(2) \dots$ e dunque $S = \mathbb{N}$ ∎

Esercizio

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Da fare

Oss che differenza c'è tra dim e costr

$n!$ $\qquad 1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 2! = 2 \cdot 1! \qquad 3! = 3 \cdot 2!$

Definire "ricorsivamente" la funzione $n!$

Sia $f(n) = n!$

$$f(n) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio (Disuguaglianza di BERNOULLI)

$\forall n \geq 0$ e $\forall x > -1$ $\quad (1+x)^n \geq 1+nx$

dim

base induzione $\quad (1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x = 1$

$n=0$

Se $n=1$ (non serve x la dim) $\quad (1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x = 1+x$

Se $n=2$ (//) $\quad (1+x)^2 = 1+x^2+2x \geq 1+2x$

Hp induttiva $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\boxed{\text{Ts} \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x}$$

ip. indutt.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \quad \square$$

$nx^2 \geq 0$

$1+x>0$

Esercizio $\forall n \geq 2 \quad 2^n + 4^n \leq 5^n$

Esercizio $\forall n \geq 6 \quad n^n \geq 2^n \cdot n!$

P_n = permutazione di n el.ti

= numero di modi in cui posso ordinare n elementi

1 elemento ; $P_1 = 1$

2 elementi ; $P_2 = 2$

3 elementi $P_3 = 6$

4 " $P_4 = 24$

- - - -

n elementi $P_n = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$n=1$ è vero (Base indut)

Hp induttiva $P_n = n!$

Ts $P_{n+1} = (n+1)!$

$$\underbrace{\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \dots \quad \boxed{n}} \qquad\qquad (n+1)$$

$\forall$ sequenza di n elementi, posso inserire l'elemento $(n+1)$-esimo in $n+1$ modi

$$\Rightarrow P_{n+1} = n+1 \cdot P_n = (n+1)!$$

Esempio In quanti modi possono essere smazzate 32 carte?

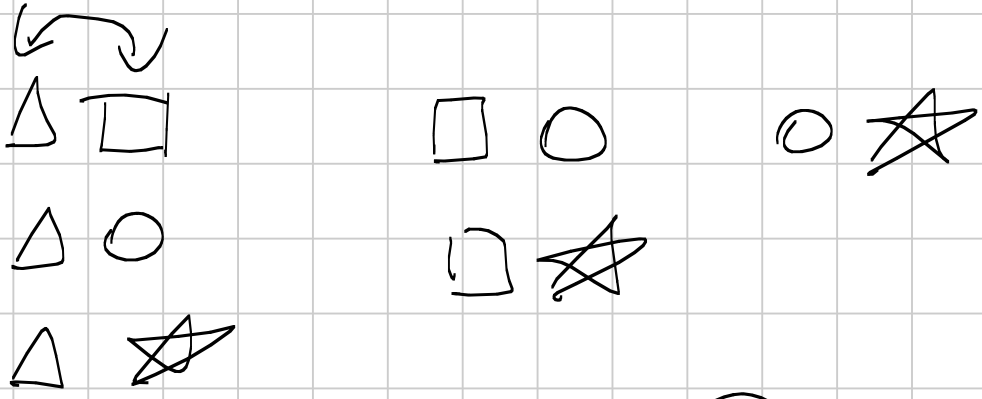
$$32!$$

Disposizioni senza ripetizione: $D_{n,k}$

In quanti modi $\neq$ possiamo disporre k ($\leq n$) oggetti scelti tra un insieme di n oggetti

Esempio △ □ ○ ☆ 4 elementi

$D_{4,2}$ vogliamo tutte "parole" di 2 elementi



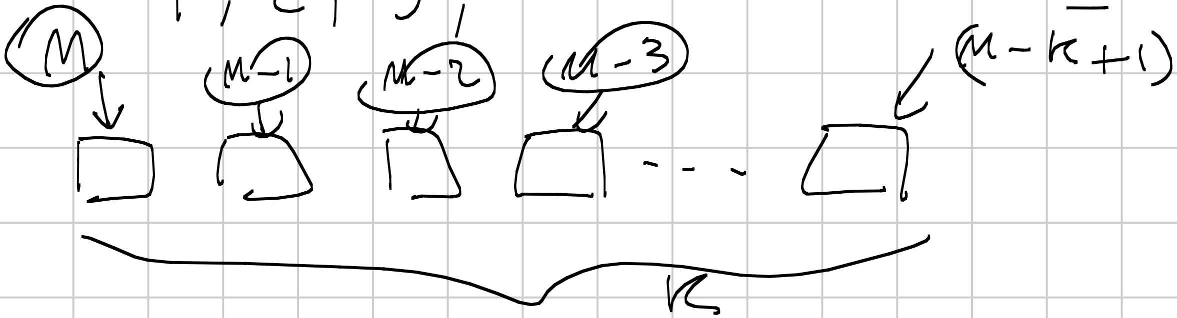
$$\boxed{6} \times 2$$

In generale $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$= (n-k+1)(n-k+2)\dots n!$$

Alfabeto n elementi

$1, 2, 3, \ldots, n$



Numero di "parole" formate da k lettere a partire da un alfabeto di n $(n \geq k)$ lettere sono $D_{n,k} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$

Combinazioni : $C_{n,k}$

In quanti modi possiamo scegliere (senza badare all'ordine) k $(\leq n)$ oggetti da un'insieme di n oggetti

Esempio

5 elementi $1, 2, 3, 4, 5$

voglio $C_{5,2}$

dim

1,2 2,3 3,4 4,5

1,3 2,4 3,5

1,4 2,5

1,5

$$\boxed{10 = C_{5,2}}$$

$$D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Però la disposizione $(1,2) \neq (2,1)$

$(1,3) \neq (3,1)$

$$C_{5,2} = \frac{D_{5,2}}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

Oss $C_{n,k}$ = numero di sottoinsiemi di k el.ti da un insieme di n el.ti

Oss $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!}$

Oss $C_{n,k}$ = n.ro sottoinsiemi di k el.ti da un insieme di n el.ti

$$D_{n,k} \geq C_{n,k}$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Def Coefficiente Binomiale

Nome $\binom{n}{k} = \begin{cases} C_{n,k} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Oss $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$

Dalla def. $\forall k \notin \{0, \dots, n\}$ $\quad \binom{n}{k} = 0 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

Dalla Def $\forall k$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\overset{!}{=} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Esercizio $\longrightarrow$ si tratta di scrivere, utilizzando la def., e poi sommare

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$$

$$= \binom{2}{0} a^0 \cdot b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$$

$$= 1 \cdot b^2 + \frac{2!}{1!\,1!} a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^2 \cdot 1$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k}$$

Teorema (Binomio di Newton)

Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Si fa per induzione, ricordando di isolare primo e ultimo termine

dim

$$n=0 \qquad (a+b)^0 = 1 \quad \checkmark \quad = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 \cdot a^0 b^0 = 1$$

Hip induttiva $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\boxed{\text{\$}}$ $\quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{\text{Hip. Ind.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

$$+ \binom{n}{0} \cdot b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \underbrace{- - - - -}_{} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

In 1 cambio l'indice "muto" k

$i = k+1 \qquad k=0 \longrightarrow i=1$

$k = i - 1$ $\qquad$ $k = n - 1 \longrightarrow i = n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{i} b^{n-(i-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} \underline{a}^{i} b^{n-i+\underline{1}}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} \underline{a^{i} b^{n-i+1}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \underline{a^{i} b^{n-i+1}} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a^{i} b^{n-i+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a^{i} b^{n-i+1} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^{i} b^{n+1-i} \qquad \blacksquare$$

Triangolo di Tartaglia

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

Esercizio

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k}$$

$=$ numero sottoinsiemi di un insieme formato da n elementi

1° modo

1° passo

$\binom{n}{0} = 1 \equiv$ numero di sottoinsiemi con $\emptyset$ elementi da un insieme di n elementi

2° passo

$\binom{n}{1} = n$ = numero di sottoinsiemi di 1 elemento

da un insieme di n elementi

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$1 \; . \; - \; - \; - \; - \; . \; n$

$\square \qquad \square \leftarrow (n-1)$

$\uparrow$ n scelte

$$D_{n,2} = n\cdot(n-1)$$

$$\Downarrow$$

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

- - - -

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$ numero di sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme di n elementi

$\# \mathbb{P}(A) =$ cardinalità di $\mathbb{P}(A)$

$=$ n.ro di elementi " " $= 2^n$

Esercizio dimostrare che $\#\mathbb{P}(A) = 2^n$ se

$\#A = n$ senza utilizzare il binomio di

Newton

dim

(2° modo) • vale per $\#A = 0$ (quando $A = \emptyset$)?

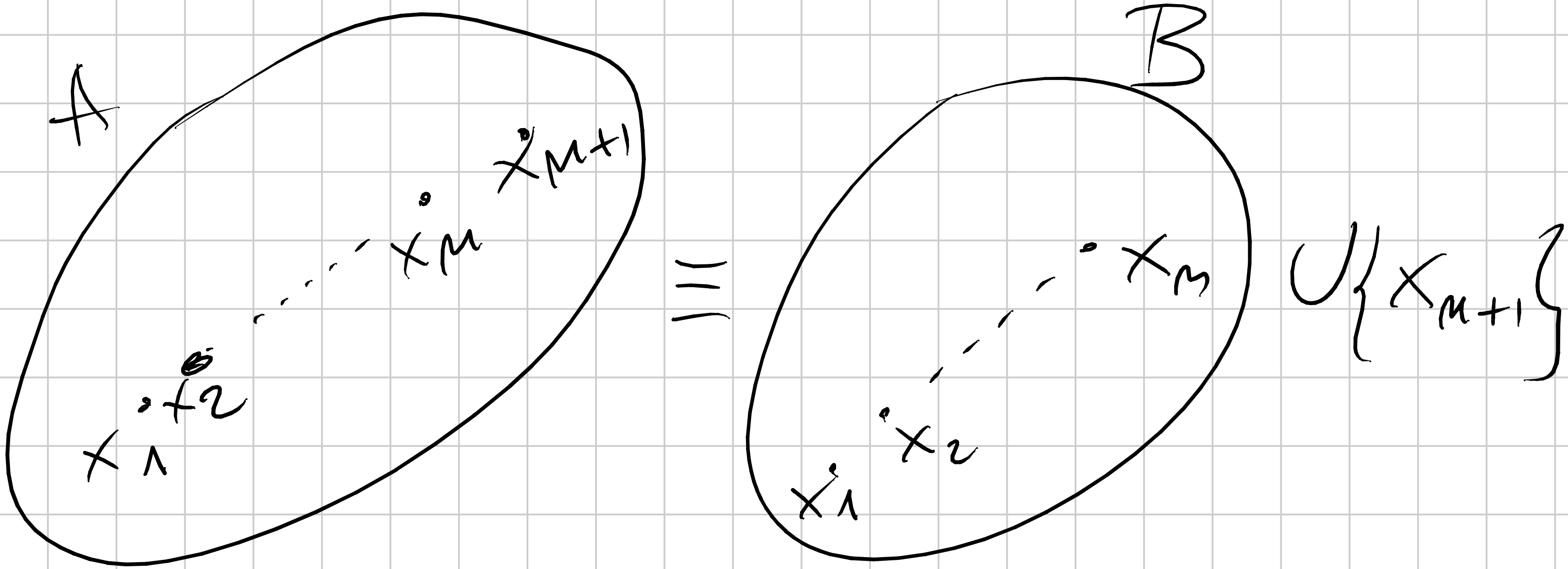
sì, infatti $A = \emptyset$ $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset\}$

[• $\#A = 1$? $A = \{1\}$ $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$\#\mathbb{P}(A) = 2^1$] non serve

Hp. induttiva : $\# A = n \Rightarrow \# \mathbb{P}(A) = 2^n$

Ts $\# A = n+1 \Rightarrow \# \mathbb{P}(A) = 2^{n+1}$



$\Omega \in \mathbb{P}(A)$, ovvero $\Omega \subseteq A$

1ª eventualità $\quad x_{n+1} \notin \Omega \Rightarrow \Omega \in \mathbb{P}(B)$

ma $\#B = n$

Hp induttiva $\Rightarrow$ questi B sono 2^n

2ª eventualità $\quad x_{n+1} \in \Omega$

$\Downarrow$

$\Omega = C \cup \{x_{n+1}\} \Rightarrow C \in \mathbb{P}(B)$

$\Longrightarrow$ $\exists$ 2^n sottoinsiemi C di questo tipo

Hip induttiva

$\Rightarrow$ $\exists$ 2^n sottoinsiemi Ω

$$\# \mathbb{P}(A) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Probabilità di un evento (finita) $= \dfrac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibile}}$

__Esercizio__

Quale probabilità ho che il numero sia pari lanciando 2 dadi

Risposta: 0,5

infatti lanciando 2 dadi trovo i seguenti

Risultati

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		3		5		5		3		1

$\boxed{36}$

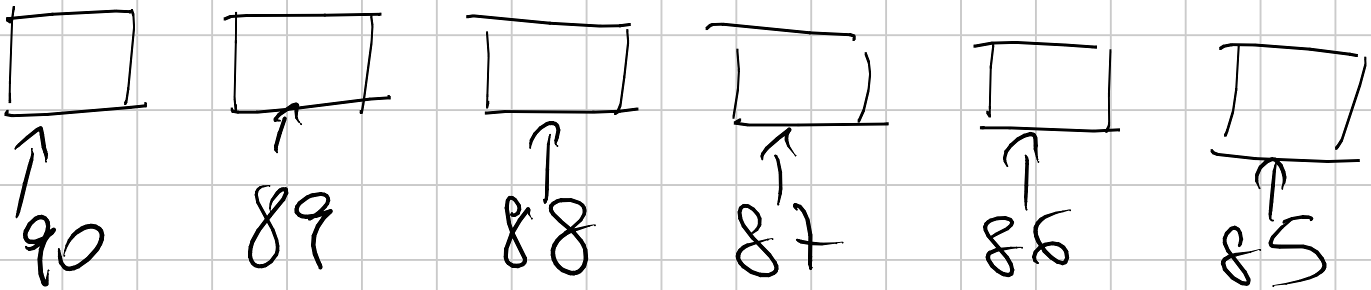
$\boxed{18}$

Esercizio Probabilità di fare 6 al superenalotto $= \dfrac{1}{90 \times 89 \times 88 \times \dots \times 85}$

$= 2,231 \cdot 10^{-12}$

dim

1, 2, 3, 4 90

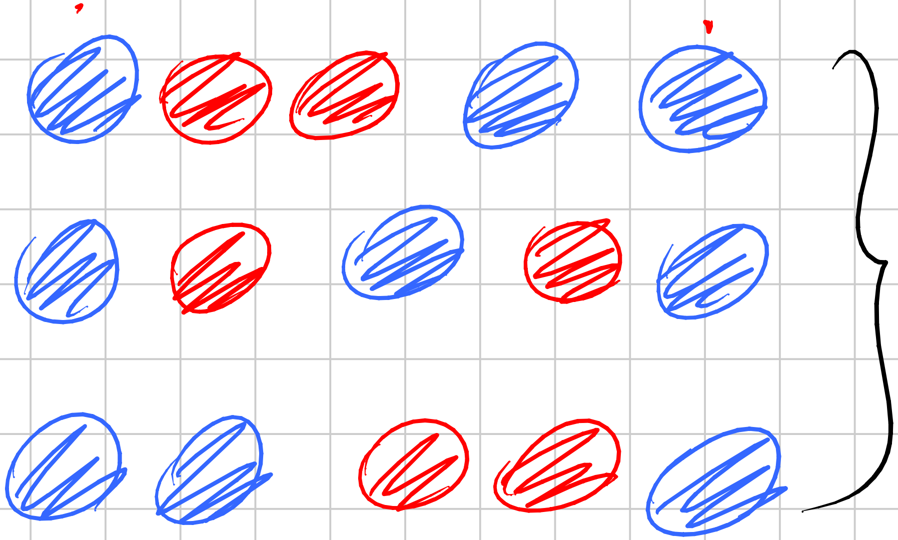


<u>Esercizio</u> In quanti modi posso disporre $n+2$ palline, n blu e 2 rosse, in modo che al primo e all'ultimo posto vadano palline blu

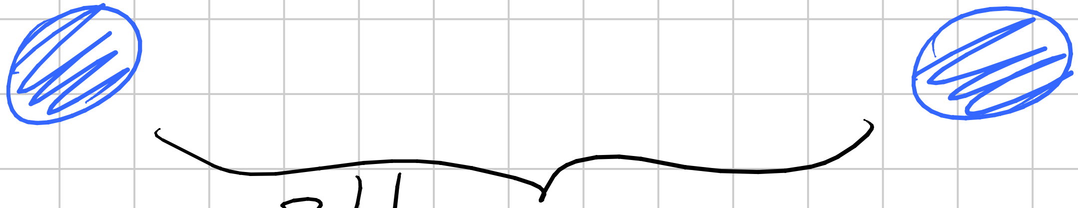
Se $n=\underline{0}$? $\nexists$ disposizioni cosiffatte

Se $n=1$? $\nexists$

Se $n=2$?  $\boxed{\text{1 modo}}$

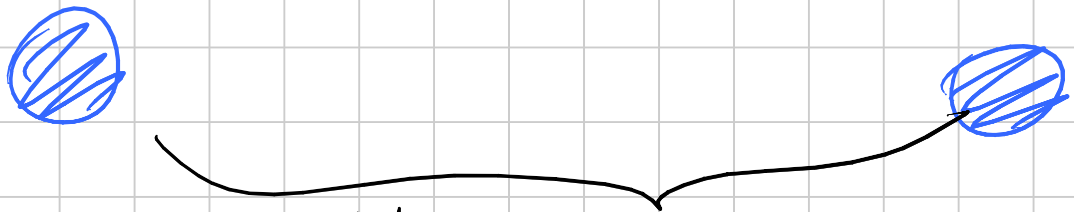
Se $n=3$?  3 modi

Se $\boxed{n=5}$



3 blu e 2 rosse

Se $\boxed{n=6}$



4 blu e 2 rosse

Il numero cercato è il numero di modi in cui posso disporre n palline, $n-2$ blu e 2 rosse, indistinguibili

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

$$\boxed{n=3} \qquad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

Esercizio Dati tutti i numeri di 4 cifre,

a) quanti hanno le cifre disposte in ord. ↗

b) " " 2 cifre pari e due dispari

Tutte ≠

a) $\square > \square > \square > \square$

3210

4210

5210

osservo che sono tutte ≠ tra loro

$$n = 10 = \# \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

$$\binom{10}{4}$$

$10 - 14 \overset{?}{=}$ in $\mathbb{N}$

$X + 13 = 0$

in $\mathbb{Z}$

$10 + (-14) = -4$

dove -14 è il numero t.c. $14 + (-14) = 0$

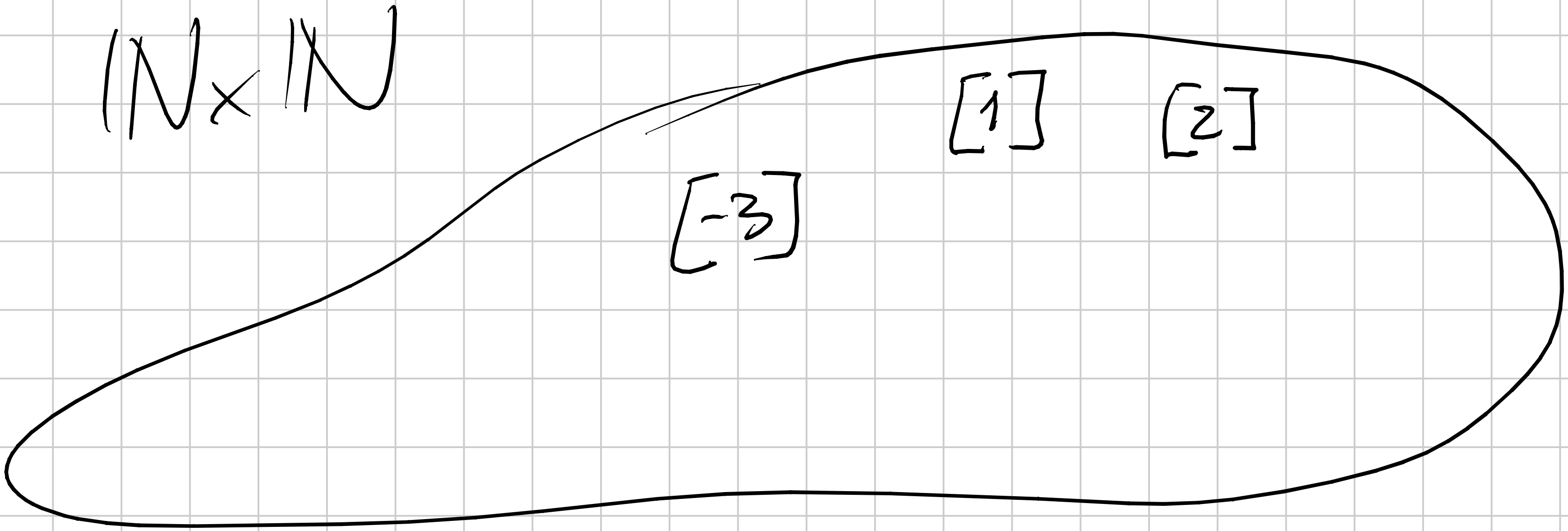
Per costruire $\mathbb{Z}$

$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(11, 11) \overset{?}{\equiv} 0$

$(1, 10) \overset{?}{\equiv} -9$

$(2, 11) \overset{?}{\equiv} -9$



$$[-3] = \{(0,3);(6,9);(10,13);(1,4) \dots\}$$

$$[1] = \{(1,0);(6,5) \dots\}$$

Def $\mathbb{Z} \equiv$ Numeri interi relativi

$$\equiv \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Oss Insieme totalmente ordinato secondo "$\leq$"

Oss $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è

commutativa
associativa
ha elemento neutro
ha inverso

<u>Domanda</u>: cosa mancava in $\mathbb{N}$?

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ era ben definita?

<u>Domanda</u>: ma come sono definiti i numeri in $\mathbb{Z}$?

Sono classi di equivalenza .....

<u>Domanda</u>: cosa mancava in $\mathbb{N}$?

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ era ben definita?

Note Title 10/17/2010

Def $\mathbb{Q} \equiv$ Numeri razionali

$$\equiv \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\left[\frac{3}{2}\right] = \left\{ \frac{18}{12};\ \frac{-9}{-6};\ \frac{30}{20};\ \ldots \right\}$$

$$\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\right)$$

Su questo insieme sono soddisfatte "tutte" le proprietà che si utilizzano abitualmente

- $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

1) È associativa. $\leftarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$
2) " commutativa. $\leftarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
3) ha elemento neutro 1.
4) $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

5) è associativa

6) è commutativa

7) ha elemento neutro 0

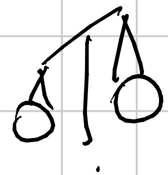
8) $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \exists -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ : \ \frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

Inoltre

9) Il prodotto è distributivo rispetto alla somma

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}$$

Le operazioni sono compatibili con la relazione "$\leq$" di ordine totale

10) $\underline{a \leq b} \Rightarrow \forall c \quad a+c \leq b+c$ 

11) $\underline{a \leq b} \Rightarrow \forall c \geq 0 \quad a \cdot c \leq b \cdot c$

$$3 \leq 4 \Rightarrow 3+10 \leq 4+10$$

$$3-20 \leq 3-20$$

$$3 \leq 4 \Rightarrow 3 \cdot 7 \leq 4 \cdot 7$$

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5} = 5 \times 10^{-1}$$

sviluppo decimale "finito"

$$\frac{1234}{10.000} = \boxed{0,1234} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{1}{3} = \boxed{0,3333\ldots} = 0,\overline{3}$$

sviluppo decimale "periodico"

$$\boxed{x^2 = 2}$$

Def $\mathbb{R} \equiv$ Numeri reali

Su $\mathbb{R}$ son definite "+", "·" e "≤"
e questi godono delle stesse proprietà
viste per $\mathbb{Q}$

Domanda $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$? NO!!

La differenza tra i due la fa
il seguente assioma, detto

Note Title 10/17/2010

ASSIOMA di COMPLETEZZA (DEDEKIND)

Dati • $A, B \subseteq \mathbb{R}$, • $A, B \neq \emptyset$, tali che

$\forall a \in A \; \forall b \in B \quad a \leq b$ $\quad (\# A \cap B \leq 1)$

allora $\exists c \in \mathbb{R} : \; a \leq c \leq b \;\; \forall a \in A \; \forall b \in B$

elemento separatore (di A e B)

Iniziamo con l'osservare che in $\mathbb{Q}$ non si può misurare la diagonale del quadrato di lato 1

Esercizio $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim

la tesi è che $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$

1 caso m pari ed n dispari $\Rightarrow m = 2k$ e n dispari

$$\sqrt{2} = \frac{2k}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{4k^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \cancel{2}^{1} n^2 = \cancel{4}^{2} k^2$$

$\Rightarrow$ n^2 è pari **assurdo** (poiché n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari)

2° caso m ed n dispari $\Rightarrow 2 = \dfrac{m^2}{n^2}$

$$\Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 \text{ è pari } \textbf{assurdo}$$

Ma quanto vale $\sqrt{2}$? L'amara sorpresa è che non sappiamo scriverlo ....

$$1 < 2 < 4 \Rightarrow \boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$$

Adesso $(1,1)^2 = 1,21 < 2$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 \Rightarrow \boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$$

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2 < (1{,}42)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42}$$

etc

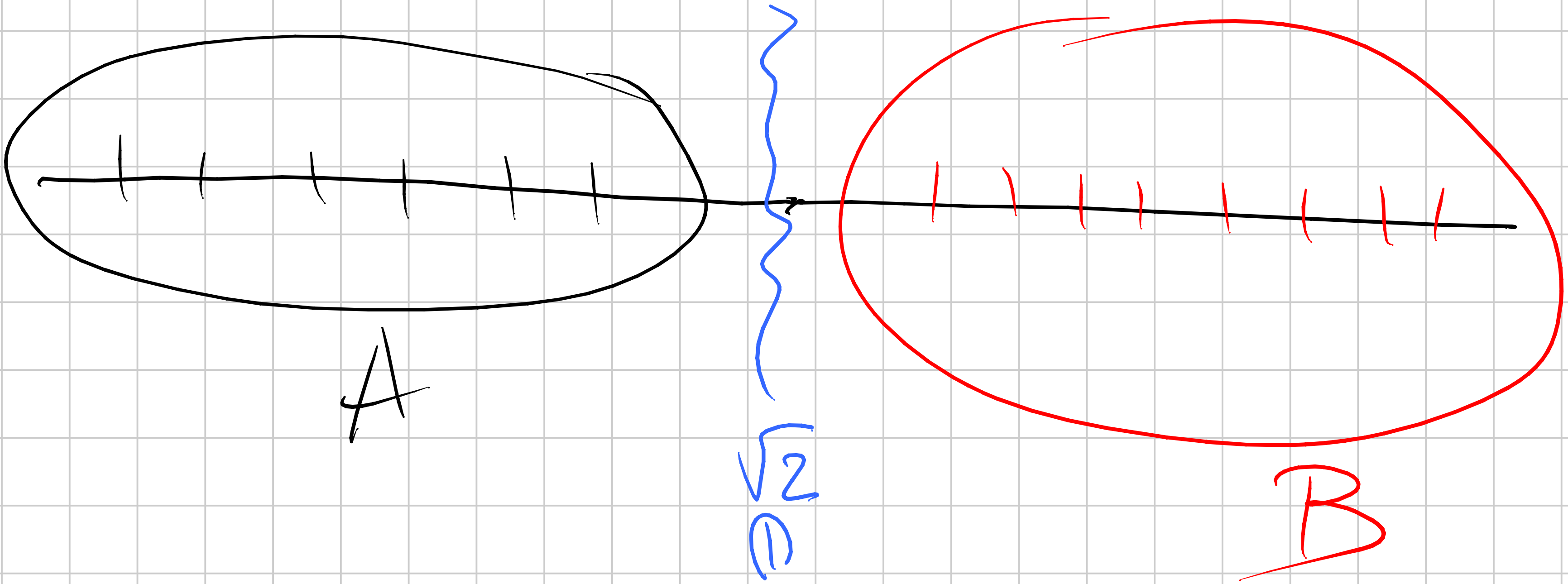
In tal modo si costruiscono due insiemi

$A = \{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414\ \dots\} \neq \emptyset$ approx per difetto

$B = \{\dots\ 1{,}415;\ 1{,}42;\ 1{,}5;\ 2\} \neq \emptyset$ approx. x eccesso

t.c. $\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a \leq b$

e $\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a \leq \sqrt{2} \leq b$



$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ elemento separatore

che $\exists \sqrt{2}$ segue dall'Assioma di Dedekind

Teorema $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind

Dim Questo Teorema si prova osservando che le due classi A e B che hanno $\sqrt{2}$ come el. to separatore in $\mathbb{R}$

in $\mathbb{Q}$ non hanno el. to separatore

$(\nexists c \in \mathbb{Q} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B)$

Dim.

A tal fine si prendono

$A = \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \quad q^2 \leq 2 \}$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \quad q^2 \geq 2 \}$

e si prova che $A \cap B = \emptyset$, $\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$

ma $\nexists c \in \mathbb{Q} : a \leq c \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$

Preso $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$, si definisce

$$p := q - \frac{q^2-2}{q+2} = \frac{\cancel{q^2}+2q-\cancel{q^2}+2}{q+2} = \frac{2q+2}{q+2}$$

e dunque $p^2 - 2 = \left[\frac{2q+2}{q+2}\right]^2 - 2$

$$= \frac{4q^2+4+\cancel{8q}-2q^2-8-\cancel{8q}}{(q+2)^2}$$

$$p^2 - 2 = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2}$$

① $q \in A \Rightarrow q < p \;\&\; q \in A$

$$q < p \iff q < \frac{2q+2}{q+2} \iff q^2 + 2q < 2q + 2$$

$$\iff q^2 < 2$$

che è vero $(q \in A)$

$$p \in A \iff p^2 - 2 = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2} \le 0$$

$$\iff q^2 - 2 \le 0$$ che è vero $(q \in A)$

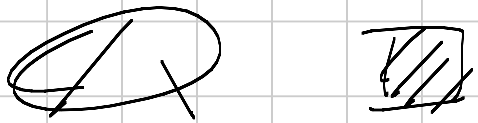
② $q \in B \Rightarrow p < q$ & $p \in B$

$$p = \frac{2q+2}{q+2} < q \iff \cancel{2q} + 2 < q^2 + \cancel{2q}$$

$$\iff 2 < q^2$$ che è vero poiché $q \in B$

$$p \in B \iff p^2 - 2 = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2} > 0$$

$$\iff q^2 - 2 > 0$$ che è vero poiché $q \in B$

e questo significa che
non esistono elementi separatori
in 

Massimo ed estremo superiore

Teorema $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme finito
(cardinalità finita)
$\Rightarrow \exists \min A \quad \max A$

dim

per induzione se $A = \emptyset$ allora non c'è nulla da pro

$\# A = 1$ $A = \{x_1\}$ $\exists \min A = \max A = x_1$

$\# A = 2$ $A = \{x_1, x_2\}$ $\exists \max A = \max\{x_1, x_2\}$

$\min A = \min\{x_1, x_2\}$

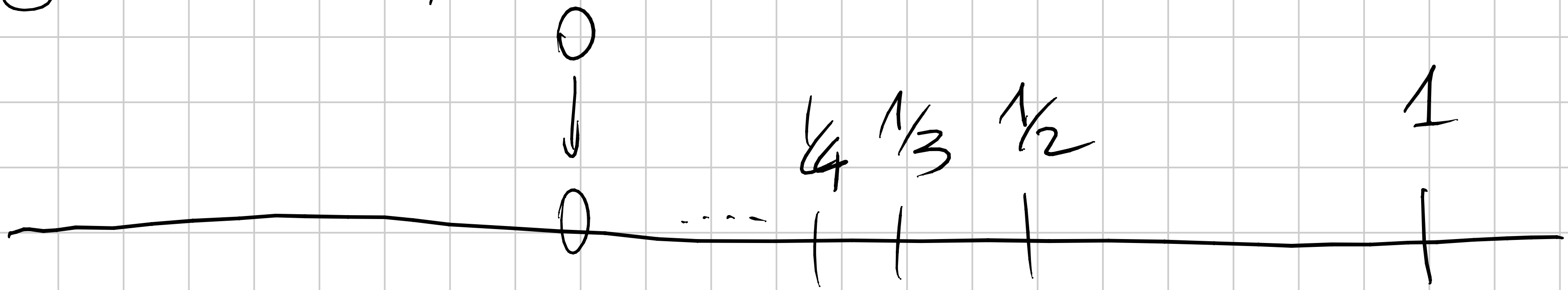
$\# A = 3$ $A = \{x_1, x_2, x_3\}$

$= \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\}$

$$\max \theta = \max \left\{ \max \{x_1, x_2\}, x_3 \right\}$$

Problema: esiste $\min\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$?

la risposta è no, anche se 0 deve giocare qualche ruolo ....



- Osservo che $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$
- però $0 = \frac{1}{n}$ è una eq. impossibile.

quando $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

ovvero $0 \notin A$

$\nexists$ ~~A~~ $\min A$

<u>x assurdo</u> $\exists\, \bar{x} \in A$ con $\bar{x} = \min A$

~~se~~ $\bar{x} \in A$ allora $\bar{x} = 1/\bar{n}$ per un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$

~~o~~ovvero $\frac{1}{\bar{n}} = \min A$ ma questo è assurdo

In quanto $\frac{1}{n+1} \in A$ e $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

Visto che $\mathbb{R}$ è un insieme ordinato,

ha senso definire i maggioranti (minoranti)

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Un numero $m \in \mathbb{R}$

tale che $a \leq m$ $\forall a \in A$ si dice

Maggiorante di A

Oss nel caso precedente $A = \{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \}$

0 è un minorante di A

Indichiamo l'insieme dei maggioranti di A con

$$\mathcal{M}_A = \{ m \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq m \;\; \forall a \in A \}$$

Oss: $\mathcal{M}_A = \emptyset$?

Oss: $\mathcal{M}_\emptyset$?

<u>Def</u>: $A \neq \emptyset$ si dice "estremo superiore di A" il numero $\Lambda = \min \mathcal{M}_A$

e si dice $\Lambda = \sup A$

<u>Oss</u> $\mathcal{M}_A = \emptyset \Rightarrow \sup A = ?$

<u>Oss</u> $A = \emptyset \Rightarrow \sup \emptyset = ?$

Minoranti di A $\quad m_A$

Estremo inferiore di A $\quad \lambda$

$\inf \emptyset \overset{?}{=}$